Rekonstruktion eines Quaders

Aus dem perspektiven Bild eines Quaders ist seine Form und Größe und die Lage des Perspektivitätszentrums zu bestimmen. Dazu werden zunächst die Fluchtpunkte der drei Kantenquadrupel bestimmt. Sieht man auf eine Ecke, gibt es drei sichtbare Kantentripel, sieht man auf eine Kante, gibt es wenigstens ein Kantentripel und zwei Kantenpaare. Läuft ein Kantentripel nicht in seinem Fluchtpunkt zusammen, handelt es sich nicht um die perspektivische Darstellung eines Quaders.

Die drei Fluchtpunkte zeigen drei aufeinander senkrechte Richtungen im Perspektivitätszentrum, dessen Lage dadurch bis auf Spiegelung eindeutig bestimmt ist.

Wir bezeichen den Fluchtpunkt des Kantentripels mit C, die beiden anderen Fluchtpunkte mit A und B. Das Perspektivitätszentrum P bildet mit den Fluchtpunktpaaren in Raum rechtwinklige Dreiecke, es gilt also

$$(P-A)^2+(P-B)^2=(A-B)^2,\quad (P-B)^2+(P-C)^2=(A-C)^2,\quad (P-C)^2+(P-B)^2=(C-B)^2. \tag{1}$$

Daraus folgt $2(P-A)^2=(A-B)^2+(A-C)^2-(B-C)^2$ etc., alles in gewohnten cartesischen Koordinatenpaaren. Das ergibt $P^2-2PA=BC-AB-AC$ etc. und schließlich

$$(P-C)(A-B)=0,(P-A)(B-C)=0,(P-B)(C-A)=0,. \tag{2}$$

Die Verbindung des Perspektivitätszentrums zu einem Fluchtpunkt liegt in einer Ebene senkrecht zu der Verbindung der beiden anderen Fluchtpunkte. Damit geht das Lot aus dem Perspektivitätszentrum auf die Bildebene durch den Höhenschnittpunkt des Fluchtpunktdreiecks.

Wir legen nun das Koordinatensystem gleich ins Fluchtpunktdreieck, also

$$A=[-a,-\frac{ab}{c},0]\ ,\quad B=[b,-\frac{ab}{c},0]\ ,\quad C=[0,c-\frac{ab}{c},0]$$

und

$$H=[0,0,0]\ ,\quad P=[0,0,p]\ ,\quad p=ab(1+\frac{ab}{c^2})\ .$$

Die Projektion eines Punktes Q auf die Gesichtsfeldebene $z=0$ bezeichnen wir mit Q^*. Die Aufgabe besteht darin, zu den Punkten Q^* der Gesichtsfeldebene die Originale Q zu finden. Die fehlende räumliche Koordinate z beziehen wir gleich auf den Abstand p des Perspektors, also $z=p\zeta$ Ein Punkt $Q=[x,y,p\zeta]$ findet sich dann auf der Projektion bei

$$\mathcal{P}[Q]=Q^*=[x^*,y^*,0]=\frac{1}{1-\zeta}[x,y,0]\ .$$

Wir nehmen nun an, wir kennen von einem Punkt Q dessen Gesichtsfeldkoordinaten Q^* und seine Entfernung von P. Dann ergibt sich

$$Q=[(1-\zeta)x^*,(1-\zeta)y^*,z]=(1-\zeta)Q^*+\zeta P\ .$$

Wenn wir von einem Punkt S^* auf der Gesichtsfeldebene wissen, dass sein Original S auf einer Fluchtebene durch Q liegt, also $S - Q$ senkrecht zu einer Fluchtrichtung $A - P$ ist, dann ist $S - Q$ eben eine Linearkombination von $B - P$ und $C - P$. Das reicht aus, um aus der Projektion

$$S^* = Q^* + \beta(B - Q^*) + \gamma(C - Q^*)$$

das Original S zu bestimmen. Wir bezeichnen die relative Tiefe mit σ und wissen, dass

$$S = (1 - \sigma)(Q^* + \beta(B - Q^*) + \gamma(C - Q^*)) + \sigma P \tag{3}$$

ist und verlangen nun, dass S in der durch $Q + B - P$ und $Q + C - P$ aufgespannten Ebene liegt, also das Spatprodukt $[Q - S, B - P, C - P]$ verschiwndet. Nun ist

$$Q - S = ((1 - \zeta) - (1 - \sigma)(1 - \beta - \gamma))Q^* - (1 - \sigma)\beta B - (1 - \sigma)\gamma C + (\zeta - \sigma)P$$

Wir können davon ein geeignetes Vielfaches der Differenz von $B - P$ und $C - P$ abziehen, d.h. wir können in $Q - S$ den Beitrag von C durch B ersetzen und $\beta + \gamma = \mu$ zusammenfassen:

$$Q - S + (1 - \sigma)\gamma(C - B) = ((1 - \zeta) - (1 - \sigma)(1 - \mu))Q^* - (1 - \sigma)\mu B + (\zeta - \sigma)P$$

Setzen wir

$$\sigma = \frac{\zeta - \mu}{1 - \mu}\ , \quad \mu = \beta + \gamma\ , \tag{4}$$

so wird $Q - S + (1 - \sigma)\gamma(C - B)$ ein Vielfaches von $B - P$ und das Spatprodukt also Null. Das Ergebnis lautet:

Wenn $Q = (1 - \zeta)Q^* + \zeta P$ gegeben ist dann ist $Q^* + \beta(B - Q^*) + \gamma(C - Q^*)$ das Bild eines Punktes S (Glg.3) der Fluchtebene durch B und C mit der relativen Tiefe σ (Glg.4).

Eine reale Strecke auf einer Fluchtgeraden, deren Bild etwa gleich $S^* - Q^* = \mu(B - Q^*)$ ist, hat nun die Größe $S - Q = \frac{\mu}{1-\mu}(1 - \zeta)(B - P)$. Die Längenverhältnisse, die für eine bestimmte Wahl von ζ gefunden werden, sind von dieser Wahl unabhängig, ebenso wie sie von der Maßstabsveränderung in der Gesichtfeldebene unabhängig sind. Die Wahl von $1 - \zeta$ ist also nicht nur die Wahl des Maßstabs in der Ebene, sondern die im ganzen Raum. Bis auf diese Wahl ist die Rekonstruktion des perspektivischen Bilds eines Quaders vollständig.