Warum ein Kegelschnitt 6 Brennpunkte hat

Dierck-E.Liebscher
www.aip.de/People/deliebscher/

1 Einleitung

In der gewohnten Geometrie erzeugen wir Ellipse, Hyperbel und Parabel mit einem Punkt (dem Brennpunkt F) und einer Geraden (der Directrix d). Alle Punkte der Kurve sollen ein einheitliches Abstandsverhältnis ε zu Brennpunkt und Directrix haben. Ist dieses Verhältnis größer 1, entsteht die Hyperbel, ist es gleich 1, die Parabel, ist es kleiner 1, die Ellipse, und im Grenzfall $\varepsilon \to 0$ der Kreis. Ellipse und Hyperbel haben noch einen zweiten Brennpunkt. Bei der Ellipse hat die Summe der Entfernungen eines Punktes von den beiden Brennpunkten einen festen Wert, bei der Hyperbel die Differenz der Entfernungen. Weniger bekannt ist, dass diese Summen- bzw. Differenzregel bei Ellipse und Hyperbel noch von einem zweiten Punktepaar erfüllt wird, das auf der Zeichenebene nicht sichtbar wird, weil es imaginär ist. Summe bzw. Differenz der Entfernungen zu diesen imaginären Punkten sind aber weiterhin konstant.[1]

Ellipse, Hyperbel und Parabel sind perspektive Bilder eines Kreises. Sie entstehen, wenn der Kegel der von einem Kreis aufgespannten Strahlen eines Perspektivitätszentrums von einer Ebene geschnitten wird (Abbildung 1). Deshalb fasst man sie als Kegelschnitte zusammen. Mit Abständen und Winkeln kann man nun aber nicht gut hantieren, wenn man projektive Bilder betrachtet, weil auf diesen keine einheitlichen Maßstäbe gelten können. Deshalb muss man nach einer projektiven Charakterisierung der Kegelschnitte suchen, die ohne Abstände und Winkel auskommt. Wir werden sehen, dass ein solcher projektiver Zugang die Existenz des zweiten Brennpunktpaares erklärt und noch ein drittes Brennpunktpaar ans Licht bringt.

2 Die projektiven Eigenschaften eines Kreises

Projektive Konstruktionen beschränken sich auf Schnittpunkte verschiedener Kurven und gerade Verbindungen von Punkten. Geraden, Schnittpunkte und Verbindungen bleiben bei Projektionen erhalten. Was in diesem Rahmen für einen Kreis gefunden wird, gilt dann auch für einen Kegelschnitt.

Beginnen wir mit einem gleichschenkligen rechtwinkligen Dreieck ABC (Abb. 2). Wir fällen zunächst irgend ein Lot g_3 auf die Hypotenuse AB und markieren die Punkte P_4 und P_5, in denen es die Katheten AC und BC schneidet. Diese Punkte verbinden wir mit den jeweils gegenüberliegenden Ecken. Die beiden Verbindungen g_6 und g_7 schneiden sich in einem weiteren Punkt P_8 des Umkreises (drei haben wir schon, nämlich die Ecken des Dreiecks). Nun formulieren wir das Ergebnis ohne alles Zirkeln. Wir beginnen mit zwei Punkten A und B, die auf zwei verschiedenen Geraden b und a liegen, und einem dritten Punkt P, der auf keiner der beiden liegt (Abb. 3). Zu jeder Geraden c durch A gibt es eine Gerade w durch P, die a im gleichen Punkt (D) schneidet. Zu w wiederum gibt es eine Gerade d durch B, die b im gleichen Punkt (E) schneidet. Die Geraden c und d schneiden sich nun in einem Punkt F, der zu dem Kegelschnitt gehört, der durch die Punkte A, B und $C = a \times b$ geht und die Tangenten QA und QB hat.

[1] Man bezeichet den Abstand der reellen Brennpunkte mit $2f$, die Verbindung der beiden als große Achse, ihre Länge mit $2a$, das Lot im Mittelpunkt als kleine Achse, ihre Länge mit $2b$. Im Falle der Ellipse ist $a^2 - b^2 = f^2$. Im Falle der Hyperbel schreibt man $a^2 + b^2 = f^2$, auch wenn die kleine Achse keine Begrenzung hat. Das Verhältnis $\varepsilon = f/a$ heißt Exzentrizität. Wenn man den reellen Brennpunkten die Koordinaten $[-f, 0]$ und $[f, 0]$ gibt, hat das imaginäre Paar die Koordinaten $[0, -\mathrm{i}f]$ und $[0, \mathrm{i}f]$.

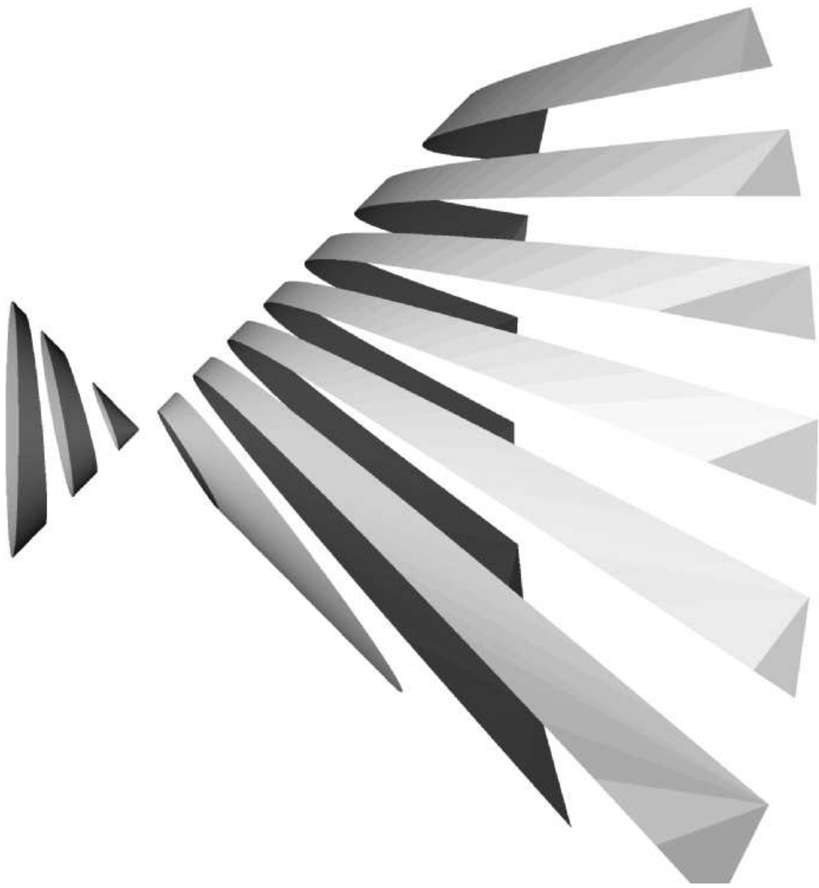

Abbildung 1: Ebene Schnitte eines Kegels

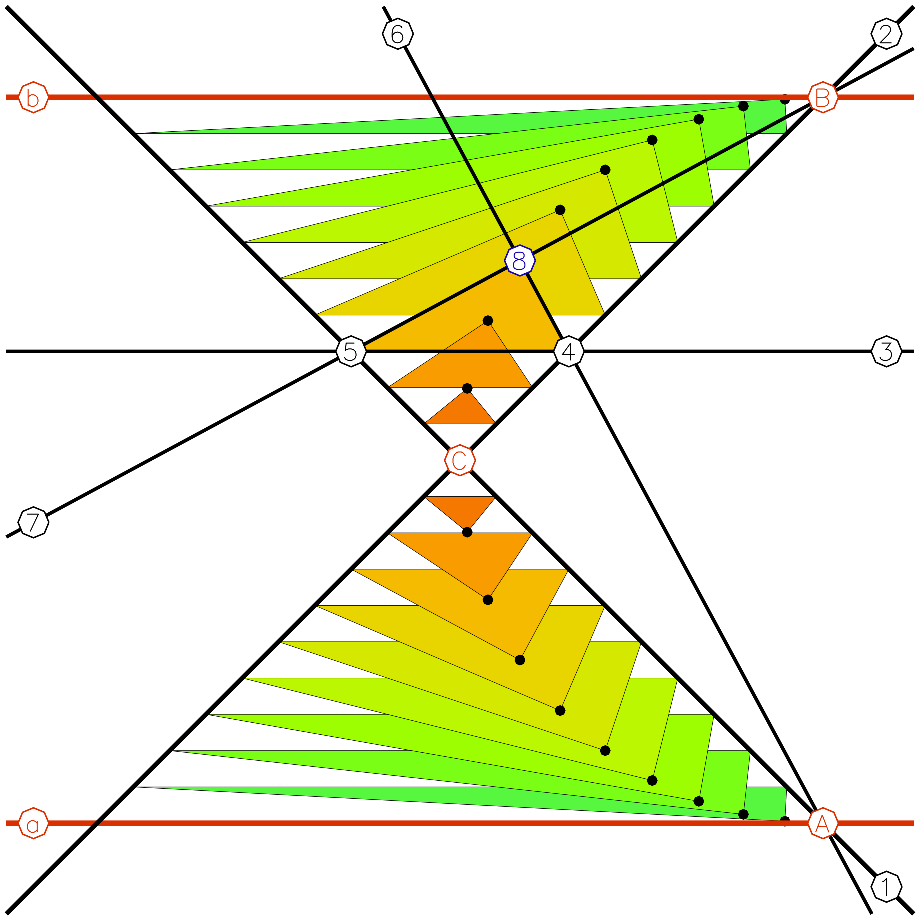

Abbildung 2: Projektive Erzeugung eines Kreises

Wir zeichnen ein gleichschenkliges rechtwinkliges Dreieck ABC und errichten die Lote a und b auf AB in A und B. Wir finden weitere Punkte des Umkreises, indem wir andere Lote g_3 auf AB errichten. Dann gibt es Schnittpunkte P_4 und P_5 mit den Seiten BC und AC. Verbinden wir B mit P_5 und A mit P_4. Der Schnittpunkt P_8 beider Verbindungen ist ein Punkt des Umkreises.
Da die Dreiecke ACP_4 und BCP_5 kongruent sind die Winkel CAP_8 und CBP_8 gleich und der Winkel AP_8B wie ACB ein rechter. P_8 liegt aufdem Thaleskreis.

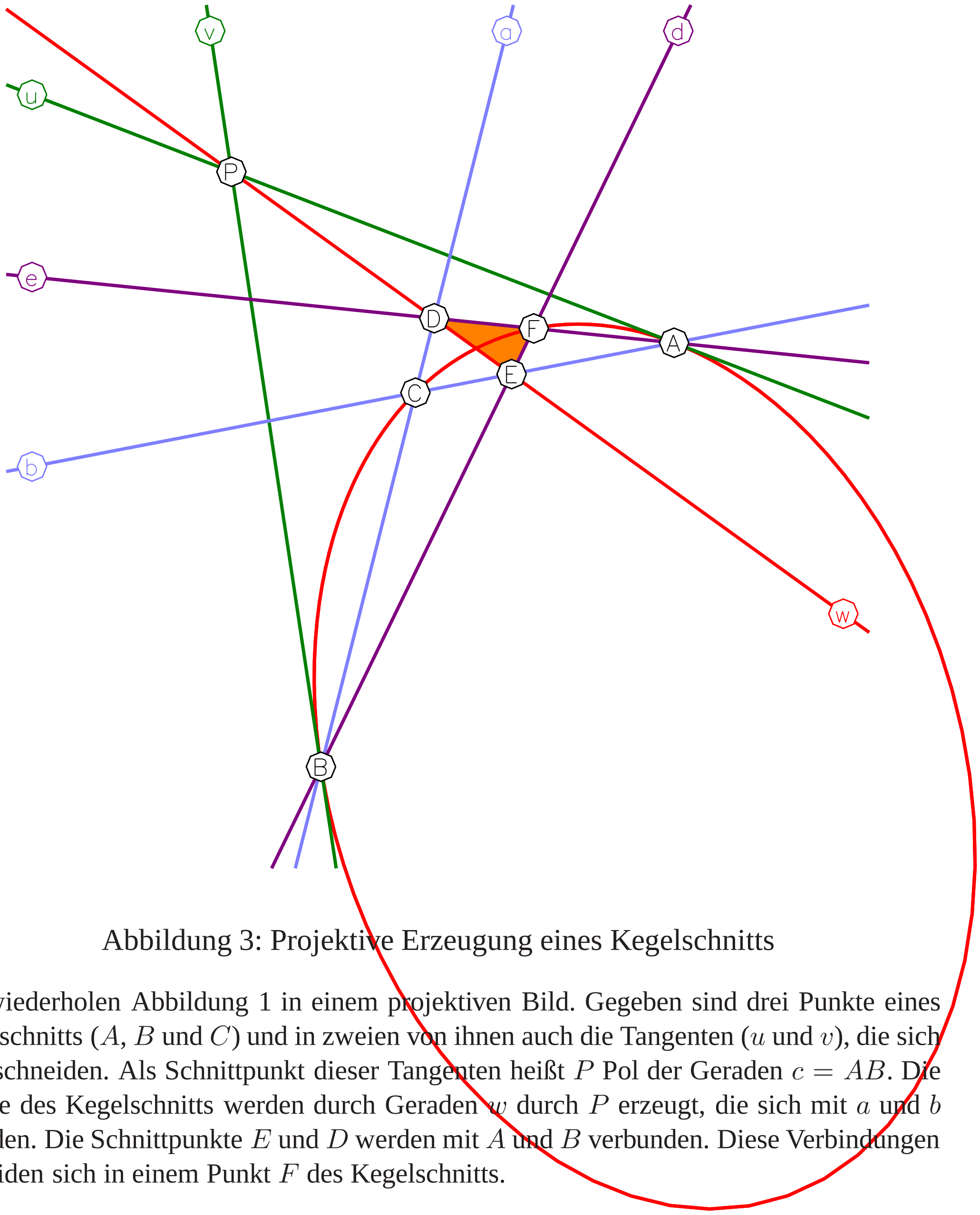

Abbildung 3: Projektive Erzeugung eines Kegelschnitts

Wir wiederholen Abbildung 1 in einem projektiven Bild. Gegeben sind drei Punkte eines Kegelschnitts (A, B und C) und in zweien von ihnen auch die Tangenten (u und v), die sich in P schneiden. Als Schnittpunkt dieser Tangenten heißt P Pol der Geraden $c = AB$. Die Punkte des Kegelschnitts werden durch Geraden w durch P erzeugt, die sich mit a und b scheiden. Die Schnittpunkte E und D werden mit A und B verbunden. Diese Verbindungen schneiden sich in einem Punkt F des Kegelschnitts.

Wir nennen die Zuordnung der Geraden durch zwei Punkte (etwa A und P), die durch den Schnitt mit einer Geraden, auf der die beiden Punkte nicht liegen (hier etwa a) vermittelt wird, perspektiv. Zwei perspektive Strahlbüschel erzeugen eine Gerade. Zwei Strahlbüschel (A und B), die beide zu einem dritten (P) perspektiv sind, erzeugen einen Kegelschnitt. Wir haben das am Kreis gezeigt, da es aber nur um Verbindungen und Schnittpunkte von Geraden geht, gilt das Ergebnis für alle projektiven Veränderungen, also eben für Kegelschnitte allgemein.

3 Polarität an Kegelschnitten

Nun müssen wir zeigen, wie die Brennpunkte projektiv (ohne Abstände und Winkel) zu definieren sind. Dazu betrachten wir die Polarität an Kegelschnitten, wie sie in Abbildung 3 auftrat, genauer. Sie vermittelt eine lineare Zuordnung von Punkten und Geraden und ist die wichtigste projektive Eigenschaft der Kegelschnitte.

Wenn eine Gerade (etwa AB) zwei Schnittpunkte mit einem Kegelschnitt hat, bestimmt sie zwei Tangenten an diesen Kegelschnitt in den beiden Schnittpunkten. Der Schnittpunkt (P) dieser beiden Tangenten heißt Pol der Geraden AB. Umgekehrt heißt die Verbindungsgerade AB der Berührpunkte des Tangentenpaars aus einem Punkt P an den Kegelschnitt die Polare des Punktes.

Wenn in Abbildung 3 der zweite Schnittpunkt F des Kegelschnitts mit der Geraden QC gesucht wird, dann müssen sich die Geraden AE und BD dort in F schneiden und es entsteht ein vollständiges Viereck $ABCD$ (Abb. 4).

Auf jedem Strahl durch den Pol P einer Geraden g teilt diese Gerade und ihr Pol die Schnittpunkte des Strahls mit dem Kegelschnitt mit dem Strahl harmonisch. Das ist gezeigt, wenn die Gerade den Kegelschnitt in reellen Punkten schneidet. Wir verlangen nun diese Eigenschaft auch für den Pol einer Geraden, die den Kegelschnitt nicht schneidet.

Schneidet die Gerade den Kegelschnitt nicht, so stellen wir sie als Verbindung zweier Punkte dar und suchen die Polaren zu diesen Punkten. Deren Schnittpunkt ist dann der Pol der Geraden. Sind zwei Geraden und ihre Pole gegeben, ist der Schnittpunkt der Geraden der Pol der Verbindung ihrer Pole (Abb. 6). **Von jedem Punkt auf der Polaren p eines Punktes P teilt dieser Punkt und seine Polare das Tangentenpaar an den Kegelschnitt harmonisch.**

Polarität erweitert die Eigenschaft der Orthogonalität, deren Konstruktion in der gewohnten Geometrie den Gebrauch eines Zirkels voraussetzt. Dieser ist jetzt absichtlich beiseite gelegt worden. Alle Strahlen durch den Pol $P[g]$ einer Geraden g stehen – immer bezogen auf den Kegelschnitt – senkrecht auf der Geraden g. Die Pole dieser Strahlen wiederum liegen selbst alle auf der Geraden g. Wir erhalten eine Möglichkeit, Längen und Winkel zu vergleichen, wenn wir uns generell auf einen speziellen Kegelschnitt (der dann absoluter Kegelschnitt heißt) beziehen. Der ist in der gewohnten Geometrie nicht zu sehen: Er ist imaginär, bestimmt von zwei konjugiert komplexen Punkten, deren Verbindung die Ferngerade ist. Wir werden uns die Fälle ansehen, wo man alles schön reell zeichnen kann.

4 Die projektive Eigenschaft der gewohnten Ellipse

Suchen wir zuerst die Polare eines gewohnten Brennpunkts. Wegen der Spiegelsymmetrie an der großen Achse muss sie auf dieser senkrecht stehen. Wegen der harmonischen Teilung liegt ihr Schnittpunkt mit der großen Achse auf der Seite des Brennpunkts im Abstand a^2/f vom Mittelpunkt. Damit ist die Polare des Brennpunkts mit der Direktrix identisch. Jede Sehne durch den Brennpunkt hat ihren Pol auf der Directrix. Das ist nichts Besonderes, analoges gilt für jeden Punkt und seine Polare.

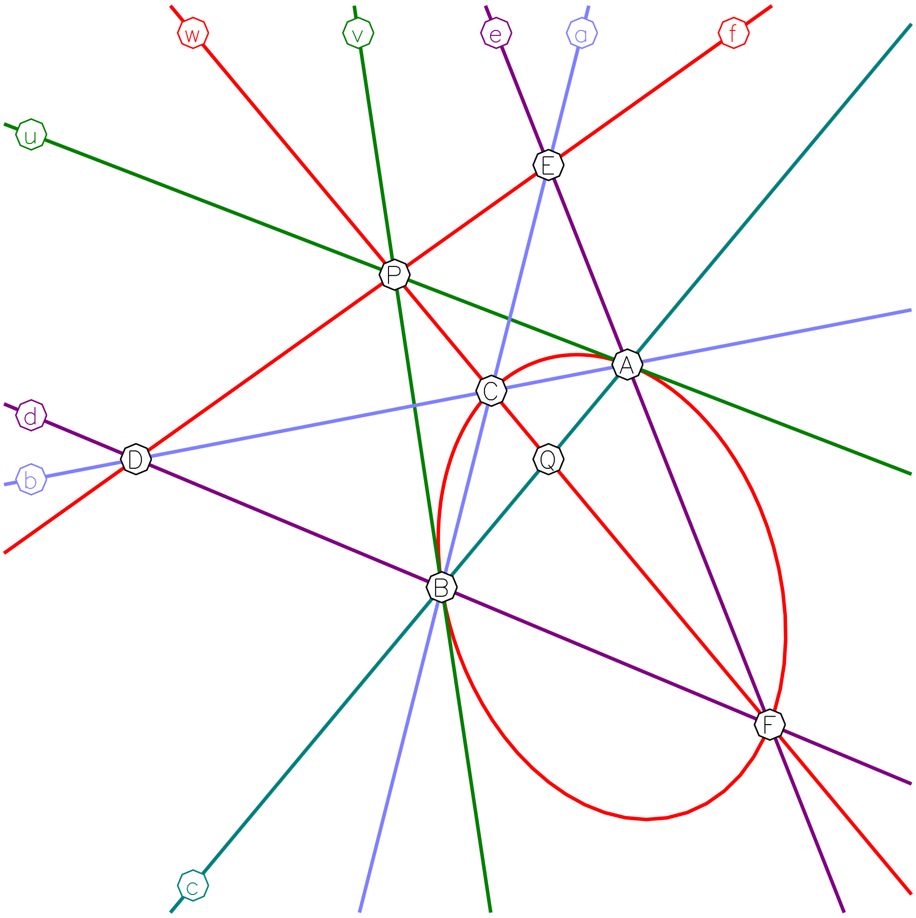

Abbildung 4: Polarität und harmonische Teilung

Wir wiederholen Abbildung 2 und legen die Gerade w so, dass sich der Punkt C selbst ergibt. Wo liegt der zweite Schnittpunkt mit dem Kegelschnitt? Er muss an einer Stelle F liegen, wo der Schnittpunkt D von AF mit a und der Schnittpunkt E von BF mit b auf einer Geraden durch P liegen. Es ergibt sich ein Viereck $DEAB$. FC ist eine seiner Diagonalen. Deshalb wird das Schnittpunktpaar FC der Geraden w mit dem Kegelschnitt von P und AB harmonisch geteilt.

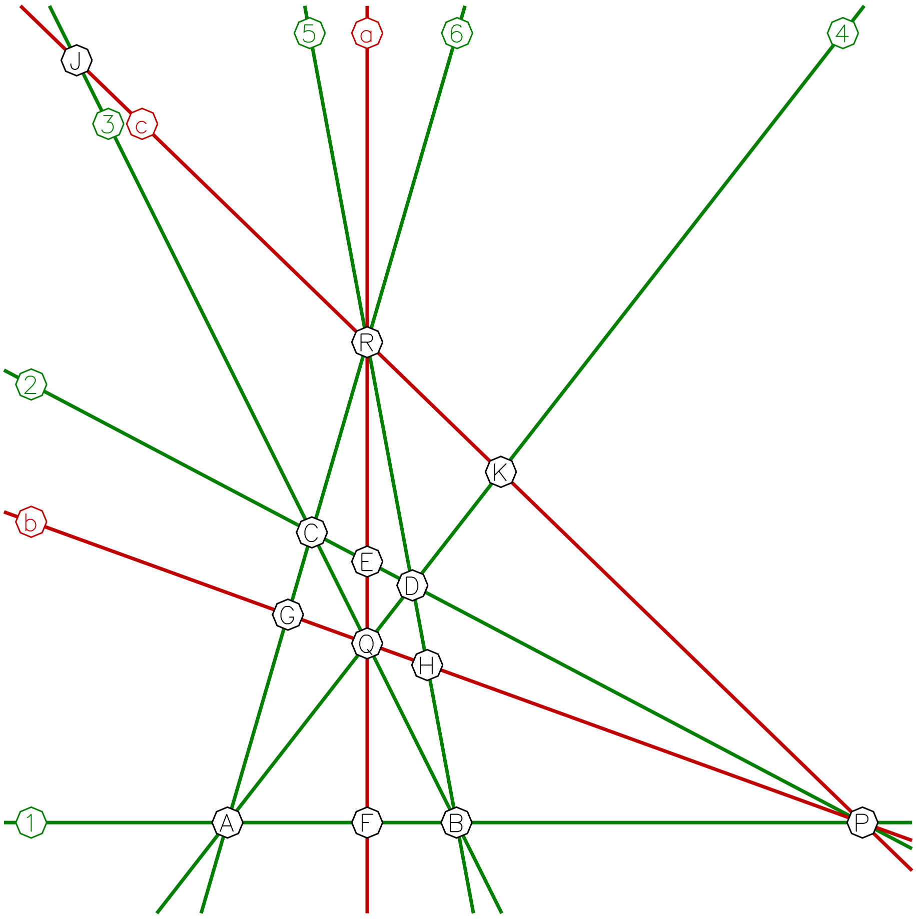

Abbildung 5: Harmonische Teilung

Ein vollständiges Viereck $ABCD$ hat sechs Seiten, genauer drei Seitenpaare, die keine gemeinsame Ecke haben. Deren Schnittpunkte PQR heißen Diagonalpunkte des Vierecks und bestimmen drei Diagonalen abc. Zwei Punktepaare auf einer Geraden teilen einander harmonisch, wenn sie als Punkte auf einer Seite oder Diagonalen eines vollständigen Vierecks darstellbar sind. Zwei Geradenpaare durch einen gemeinsamen Trägerpunkt teilen einander harmonisch, wenn sie als Seiten und Diagonalen durch einen Diagonalpunkt eines vollständigen Vierecks darstellbar sind. Harmonische Teilung vererbt sich bei allen Projektionen. Sie ist das projektive Äquivalent der metrischen Teilung, wenn einer der vier Punkte im Unendlichen liegt oder eins der Geradenpaare aus zwei aufeinander lotrechten Geraden besteht. Projektionen ändern diese Eigenschaft nicht.

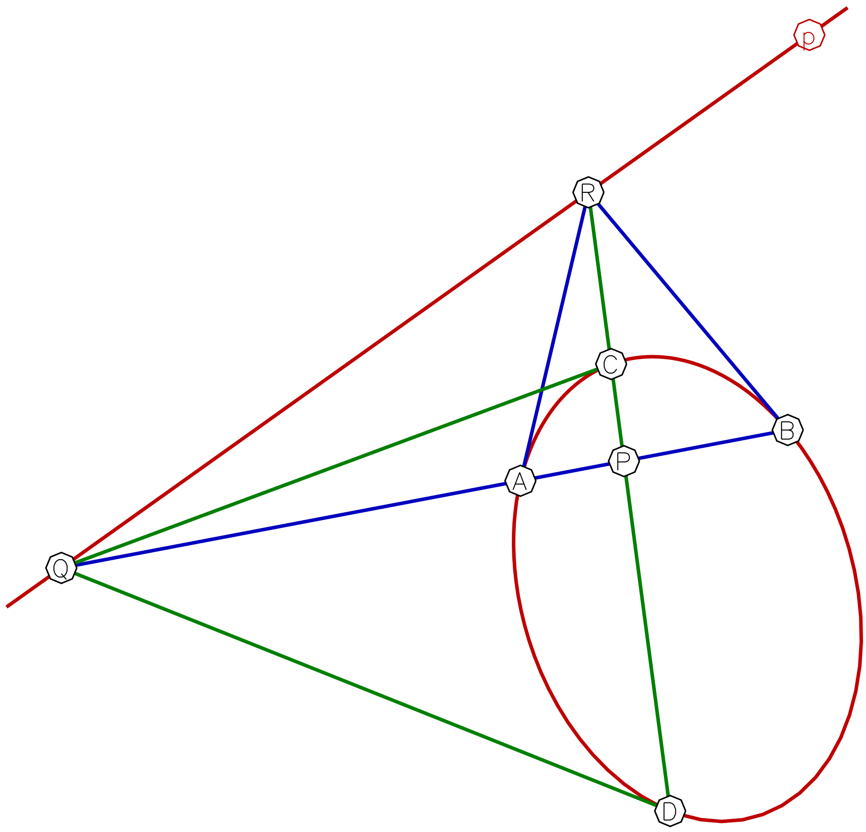

Abbildung 6: Polarendreiseit

Der Punkt P im Innern des Kegelschnitts hat keine reellen Tangenten. Deshalb muss seine Polare auf indirektem Wege konstruiert werden. Wir legen eine Sehne AB durch P und finden so ihren Pol R Der Pol der Sehne PR findet sich in einem Punkt Q. Die Verbindung $p = QR$ ist die Polare von P so wie RP die Polare von Q umd PQ die Polare von R ist.

Die Sehnen durch den Brennpunkt unterscheiden sich von den Sehnen durch andere Punkte dadurch, dass die Verbindung des Brennpunkts zum Pol einer solchen Sehne senkrecht auf der Sehne selbst steht (Abb. 7).

Nun sind wir nicht mehr auf die Berechenbarkeit von Längen und Winkeln angewiesen. Wir berufen uns nur auf die einfache Orthogonalität.

Wir nennen einen Punkt Brennpunkt, wenn die Sehnen durch den Brennpunkt senkrecht auf seiner Verbindung zu ihrem Pol stehen.

Der Mittelpunkt eines Kreises ist entsprechend dadurch bestimmt, dass alle durch den Pol einer Sehne gehenden Geraden auf der Sehne senkrecht stehen. Ein Kegelschnitt ist ein Kreis, wenn es solch einen Mittelpunkt gibt.

5 Minkowski-Geometrie: ein zweites reelles Brennpunktpaar

Wir betrachten nun die Minkowski-Ebene, die als Minkowski-Diagramm bei der Behandlung der Relativitätstheorie auftritt, aber hier nur zu geometrischen Zwecken verwendet werden soll. Es gibt zwei ausgezeichnete Richtungen (die in der Physik als lichtartig bezeichnet werden), die bei jeder Spiegelung ineinander übergehen. Sie bestimmen, was senkrecht heißt: Zwei Geraden stehen aufeinander senkrecht, wenn sie die beiden Richtungen harmonisch teilen.[2] Es gibt also nun zwei reelle Punkte auf der Ferngeraden, welche die Spiegelung definieren und damit Längen- und Winkelvergleich ermöglichen. Bei Konstruktionen können wir schlichte gerade Verbindungen zu diesen Punkten (eben die ausgezeichneten Richtungen) verwenden, wo in der gewohnten Geometrie noch der Zirkel erforderlich war.

Wenn man bei der Betrachtung orthogonaler Geradenpaare diese auf eine der lichtartigen Geraden zusammenrücken lässt, erkennt man, dass die lichtartigen Geraden auf sich selbst senkrecht stehen müssen. Die Punkte auf diesen Geraden haben alle den Abstand Null voneinander. Solche Geraden bleiben in der gewohnten Geometrie verborgen, dort sind sie imaginär.

Wo liegen die Brennpunkte eines Kegelschnitts? Die Richtung zum Pol einer Geraden durch den Brennpunkt soll senkrecht auf der Geraden stehen. Das heißt nun, der Pol der lichtartigen Geraden durch einen Brennpunkt muss auf dieser Geraden selbst liegen: Die lichtartigen Geraden durch einen Brennpunkt müssen Tangenten an den Kegelschnitt sein. Das macht die Konstruktion nun ganz einfach. Die Brennpunkte sind die Schnittpunkte der lichtartigen Tangenten des Kegelschnitts und davon gibt es nun zwei Paare (Abb. 8). Andere Geraden durch einen Brennpunkt müssen mit ihrem Pol das Tangentenpaar harmonisch teilen, also stehen auch hier die entsprechenden Richtungen aufeinander senkrecht.

Es ist eine nicht zu schwierige Übung zu zeigen, dass eine Ellipse nun wieder die Summenregel zu einem Brennpunktpaar erfüllt und sich zur gewohnten Geometrie analoge Eigenschaften finden. Man muss allerdings den richtigen Abstand nehmen, wie er auch in der Relativitätstheorie verwendet wird. Besonders merkwürdig ist, dass auf Teilen der Ellipse die Summe der Abstände und auf anderen die Differenz der Abstände gleich $2a$ ist. Sei die Ellipse durch die Punkte $[a\cos\varphi, b\sin\varphi]$ gegeben. Einer der Punkte mit lichtartiger Tangente hat $\tan\varphi = b/a$. Die Brennpunktpaare sind also $[\pm f, 0]$ und $[0, \pm f]$ mit $f^2 = a^2 + b^2$. Die Abstände vom ersten Paar sind $\sqrt{(a\cos\varphi \pm f)^2 - (b\sin\varphi)^2} = \mid f\cos\varphi \pm a \mid$. Für $\cos\varphi < a/f$ ist die Summe, für $\cos\varphi > a/f$ die Differenz gleich $2a$. Für das zweite Paar gilt Analoges, die Abstände sind dort $\mid f\sin\varphi \pm b \mid$. Eine Hyperbel der Form $[a\cosh\psi, b\sinh\psi]$ hat die

[2] Bei Darstellung der Lorentz-Transformation im Minkowski-Diagramm wird oft von schiefwinkligen Koordinaten gesprochen. Das ist nicht korrekt, weil sie nur bei unerlaubter Anwendung der gewohnten Senkrechtstellung schief sind. Die Achsenpaare, die sich nach Lorentz-Transformationen ergeben, sind aber immer senkrecht, sie definieren geradezu, was in der Minkowski-Geometrie senkrecht ist.

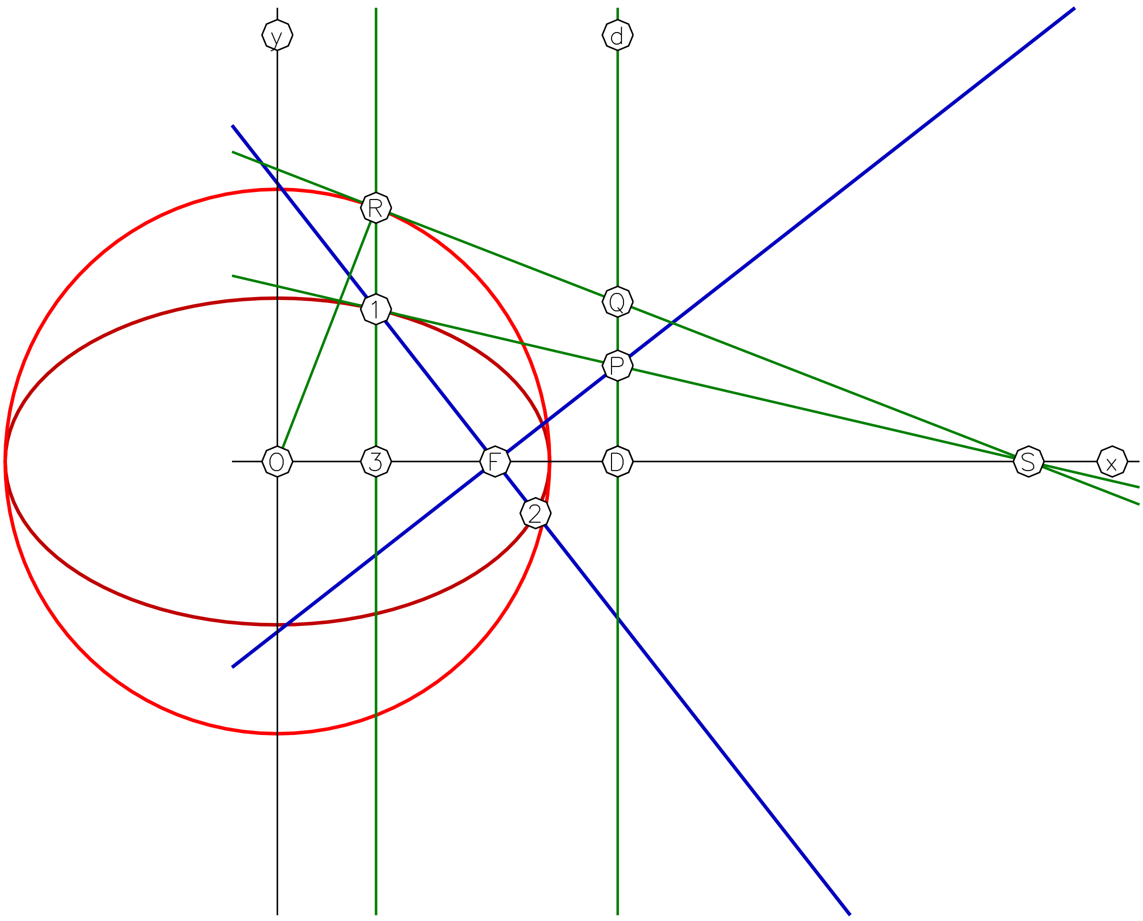

Abbildung 7: Brennpunkt und Orthogonaltät

Wir suchen die Tangente an eine Ellipse mit Brennpunkt F und Directrix d. Wo die Tangente im Punkt A_1 diese Directrix schneidet, liegt der Pol der Sehne A_1A_2 durch F. Der Punkt A_1 habe die Koordinaten $[x, y]$, der Brennpunkt sei $F = [f, 0]$, der Fußpunkt der Directrix bei $D = [a^2/f, 0]$. Wenn wir nun in y-Richtung um den Faktor a/b dehnen, erhalten wir einen Kreis. Das Dreieck ORS ist rechtwinklig und der Höhensatz $OA_3 \cdot A_3S = A_3R \cdot A_3R$ liefert

$$(x_S - x) * x = (y\frac{a}{b})^2 \;\rightarrow\; x_S = x + \frac{y^2a^2}{xb^2} = \frac{a^2}{x}$$

Nun bestimmten wir y_P aus dem Ähnlichkeitssatz

$$\frac{y}{x_S - x} = \frac{y_P}{x_S - x_D} \rightarrow y_P = y\frac{\frac{a^2}{x} - \frac{a^2}{f}}{\frac{a^2}{x} - x} = \frac{b^2}{y}\frac{f - x}{f}$$

Bilden wir nun das Skalarprodukt von $A_1 - F = [x - f, y]$ und $P - F = [a^2/f - f, \frac{b^2}{yf}(f - x)]$, so finden wir, dass es Null ist. Die Verbindung von F mit dem Pol P der Sehne A_1A_2 durch F steht auf der Sehne senkrecht.

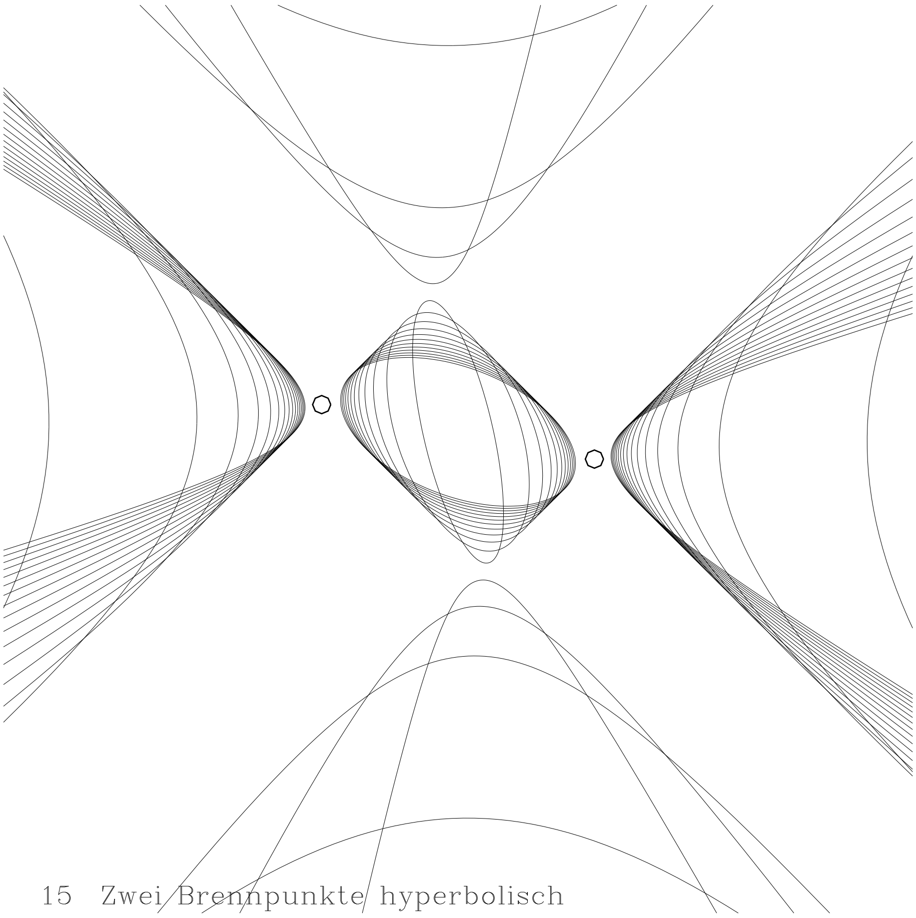

Abbildung 8: Konfokale Kegelschnitte in der Minkowski-Geometrie

Brennpunktpaare $[\pm f, 0]$ und $[0, \pm f]$ mit $f^2 = a^2 - b^2$ und den Abständen $\mid f \cosh \varphi \pm a \mid$ bzw. $\mid f \sinh \varphi \pm b \mid$.

6 de-Sitter-Geometrie: Noch ein Brennpunktpaar

Die beiden Lichtpunkte auf der Ferngeraden ersetzen wir nun durch einen Kegelschnitt mit dieser großen Achse. Verschwindet seine Ausdehnung in der Breite, finden wir in der Grenze dann gerade die Minkowski-Geometrie. Wir wollen diesen Kegelschnitt nun als absoluten Kegelschnitt benutzen. Die zu einer Geraden senkrechte Richtung wird nun durch ihren Pol an diesem absoluten Kegelschnitt bestimmt. In diesem Pol treffen sich also alle Lote, die auf der Geraden errichtet werden können. Die Geraden, die den absoluten Kegelschnitt berühren, stehen auf sich selbst senkrecht, weil sie ja ihren Pol enthalten.

Wo liegen die Brennpunkte eines anderen Kegelschnitts? Es müssen die Schnittpunkte der gemeinsamen Tangenten sein. Die gemeinsamen Tangenten bilden wieder ein Vierseit, in dem nun alle sechs Ecken ordentliche Brennpunkte sind. Die Richtung aus einem Brennpunkt zum Pol einer von ihm getragenen Geraden teilt mit der Geraden das Tangentenpaar harmonisch. Das geschieht sowohl am betrachteten Kegelschnitt als auch am absoluten Kegelschnitt, deshalb sind beide Richtungen orthogonal wie verlangt.

Nun sind wir an der Stelle, wo wir uns von der Bestimmung des einen Kegelschnitts als absolutem Kegelschnitt wieder lösen können und Brennpunkte als besondere Punkte eines allgemeinen Kegelschnittpaares beschreiben. Ein Punkt ist Brennpunkt eines Kegelschnittpaares, wenn die beiden Pole einer von ihm getragenen Geraden mit dem Brennpunkt auf einer Linie liegen. Die Brennpunkte liegen auf den Schnittpunkten der gemeinsamen Tangenten (Abb. 9). Sind die Tangenten reell, sind es auch die Schnittpunkte, aber die gemeinsamen Tangenten sind nicht immer reell.

Abbildung 9 zeigt eine Schar konfokaler Kegelschnitte. Es ist die Schar mit vier gegebenen Tangenten. Wird einer dieser Kegelschnitte zum absoltuten Kegelschnitt erklärt, erhalten alle anderen metrische Eigenschaften, die sich auch in der gewohnten euklidischen Geometrie finden. Fallen die Brennpunkte eines Paars zusammen, dann findet sich das zweite Paar in den gleichen Punkt, der zum Mittelpunkt einer Schar von Kreisen wird, und das dritte Paar wird zu Berührpunkten der gesamten Schar (Abb. 10.

7 Zusammenfassung

1. Kegelschnitte sind Objekte der projektiven Geometrie, die noch keinen Zirkel kennt. Kegelschnitte als Projektionen erwarten eine projektive Beschreibung.

2. Polarität und harmonische Teilung müssen Orthogonalität und Streckenvergleich ersetzen

3. Der Übergang zur Minkowski-Geometrie stellt die Kreispunkte auf der Ferngeraden ins Reelle. Ein zweites Brennpunktpaar wird reell.

4. Der Übergang zur deSitter-Geometrie ersetzt das Kreispunktpaar durch den absoluten Kegelschnitt. Ein drittes Brennpunktpaar wird reell

5. Metrische Eigenschaften verlieren ganz ihre Bedeutung, wenn die Brennpunkte als Eigenschaft eines allgemeinen Brennpunktpaares angesehen werden. Brennpunkte sind spezielle Punkte eines Kegelschnittpaars

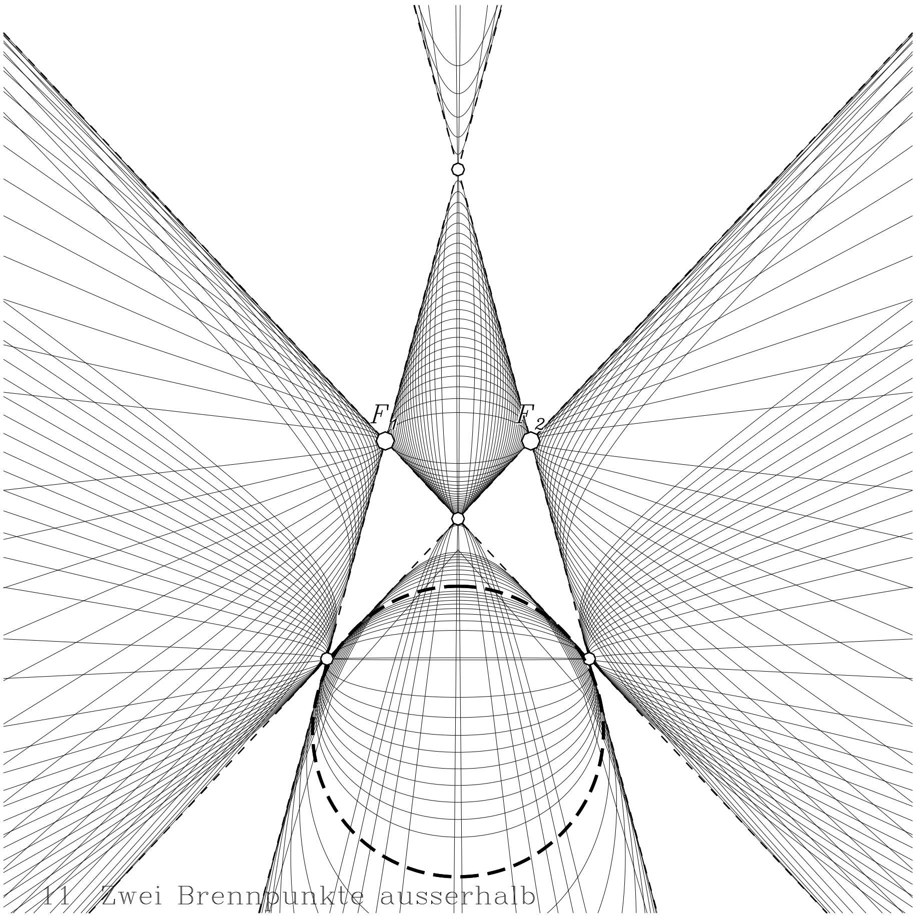

Abbildung 9: Schar konfokaler Kegelschnitte

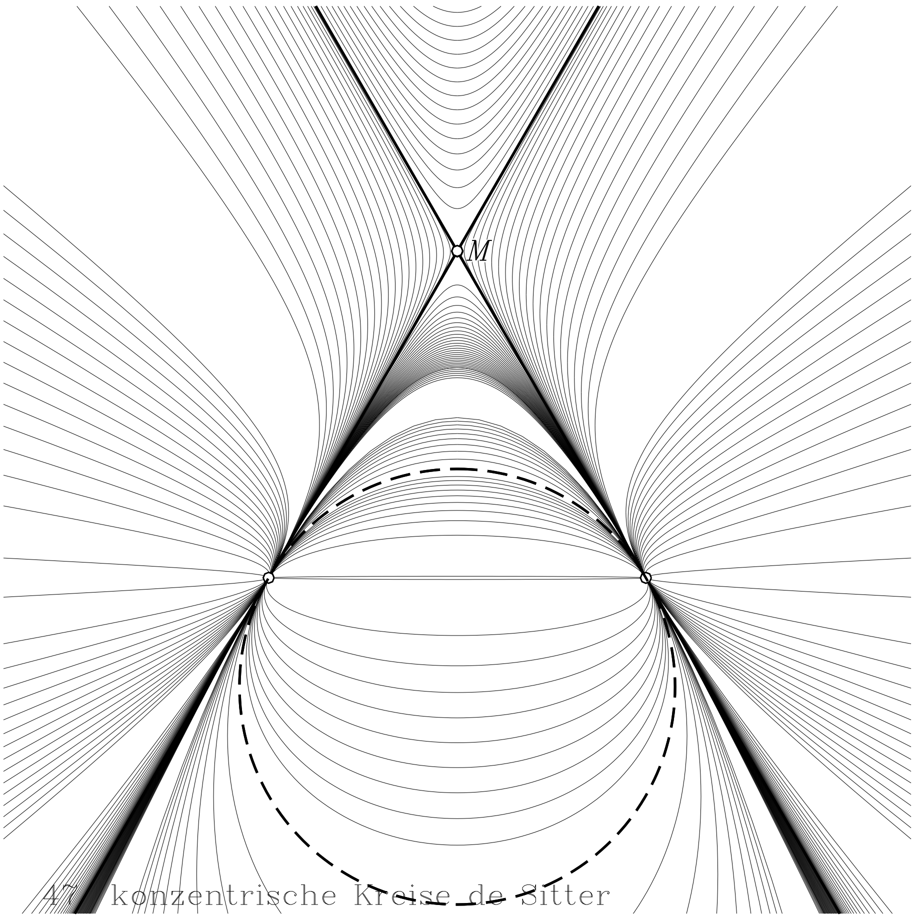

Abbildung 10: Schar konzetrischer Kreise

6. Eine Schar konfokaler Kegelschnitte hat vier gemeinsame Tangenten. Die Brennpunkte sind die Ecken dieses Vierseits, die drei Hauptachsen sind seine Diagonalen.

7. Wirkt einer der Kegelschnitte als absoluter Kegelschnitt (der einen Längenvergleich bestimmt), erhält der andere die gewohnten metrischen Eigenschaften.