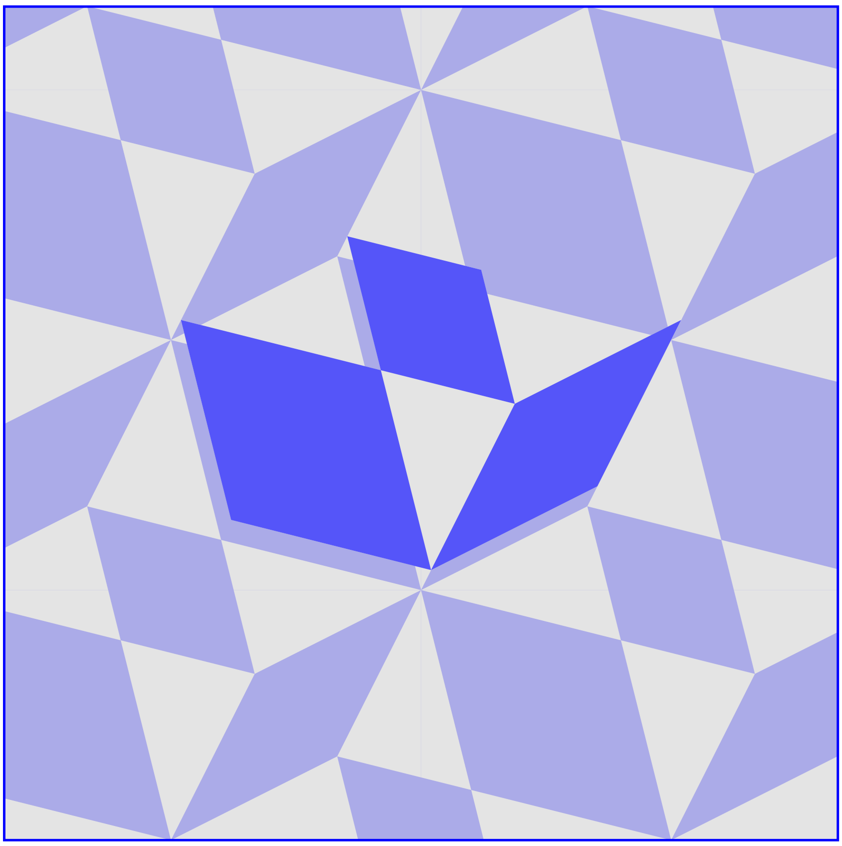
Dierck-E. Liebscher

Einsteins Relativitätstheorie und die Geometrien der Ebene

Illustrationen zum Wechselspiel von Geometrie und Physik

mit 174 Abbildungen, 6 Tabellen und einem Glossar



Die Abbildung auf dem Umschlag zeigt die Pythagoras-Figur in der pseudoeuklidischen Geometrie (siehe Abb. 5.3).

Prof.Dr.sc.nat. Dierck-E.Liebscher

Geboren 1940 in Dresden, ab 1957 Studium der Physik an der Humboldt-Universität Berlin, Diplom 1962, Assistent von Prof.Dr.H.-J.Treder, Promotion 1966, Promotion zum Dr.sc.nat. 1973, Enennung zum Professor für theoretische Physik an der Akademie der Wissenschaften der DDR 1979.

e-mail: deliebscher@aip.de
http://kosmos.aip.de/~lie/

Dieses Buch folgt in neuer Weise der Faszination zweier scheinbar getrennter Gebiete: der Relativitätstheorie und der Geometrie. Sein Thema ist die Geometrie in Raum *und* Zeit. Die Bewegung in Raum und Zeit bestimmt geometrische Konstruktionen, die jenseits der euklidischen Geometrie immer noch deren Klarheit und Zusammenhang bewahren. Dabei ist die Verblüffung ist zweiseitig: Relativitätstheorie wird Geometrie, und Geometrie findet physikalische Entsprechung. Auf der einen Seite offenbaren sich in richtig konstruierten Abbildungen ohne komplizierte Formeln die erstaunlichen Ergebnisse der Relativitätstheorie und ihre Widerspruchsfreiheit. Auf der anderen Seite ergeben sich ganz ungewohnte und unerwartete, aber physikalisch bedeutsame einfache Beispiele für nichteuklidische Geometrien, in denen noch mit Gerade und Kegelschnitt konstruiert werden kann.

Geleitwort

As a boy of 12, Einstein encountered the wonder of Euclidean plane geometry in a little book that he called „das heilige Geometrie-Büchlein" („the holy geometry booklet"). Something similar happened to Dierck Liebscher – though admittedly not quite at the tender age of 12. As a physics student in Dresden, he heard lectures on projective geometry. The delight he got from these lectures has remained with him through his working life, and he has now passed on some of it in the present book.

It is a rather unusual book and all the better for it. One of the sad things about the hectic pace and competitiveness of modern scientific research is that truly beautiful discoveries and insights of earlier ages get completely forgotten. This is very true of projective geometry and the great synthesis achieved in the 19$^{\text{th}}$ century by Cayley and Klein, who showed that the nine consistent geometries of the plane can all be derived from a common basis by projection. When Minkowski discovered that the most basic facts of Einstein's relativity can be expressed as the pseudo-Euclidean geometry of *space and time*, Klein hailed it as a triumph of his Erlangen program. For it showed that the *trigonometry* of pseudo-Euclidean space is the *kinematics* of relativity.

There is a very good reason why projective geometry is nevertheless not part of current physics courses. It can only be applied to spaces (or space-times) of constant curvature, and therefore fails in general relativity, in which the curvature in general varies from point to point. In such circumstances, one is forced (as in quantum mechanics) to use the analytical methods first introduced by Descartes. The beautiful synthetic methods of the ancient Greeks are not adequate. However, several of the most famous and important space-times that are solutions of Einstein's general relativity, notably Minkowski space and de Sitter (and anti de Sitter) space, do have constant curvature. One of the high points of Liebscher's book is the survey of all such spaces from the unified point of view of projective geometry. It yields insights lost to the analytic approach.

Perhaps the single most important justification for this book is the advent of computer graphics and the possibility of depicting on the page views of three-dimensional objects seen in perspective. Drawings and constructions may be distrusted as means to proofs, but they do give true insight that can be gained in no other way. The diagrams of this book constitute its real substance and yield totally new ways of approaching a great variety of topics in relativity and geometry. Especially interesting is the treatment of aberration, which is a vital part of relativity that gets far too little discussion in most textbooks.

This is not a textbook in any sense of the word. It is however a book that will instruct, deepen understanding, and open up new vistas. It will give delight to all readers prepared to make a modicum of effort. What more can one ask of a book?

South Newington, January 1999 — Julian Barbour

Vorwort des Autors

Dies ist ein Buch über Geometrie und über Physik. Es stellt das Wechselspiel der Grundlagen beider auf neue Art, durch genau konstruierte ebene und perspektivische Zeichnungen dar.

Die projektive Geometrie ist für den Physiker ein Land voller Wunder. Ich habe sie in Vorlesungen von Rudolf Bereis in Dresden kennengelernt, und sie hat mich immer wieder gefesselt. Die Begeisterung war endgültig, als ich sah, daß die projektive Geometrie einen ganz besonderen Zugang zur Geometrie der Relativitätstheorie bereitstellt, zu all dem merkwürdigen Verhalten von Uhren und Maßstäben, das in der populärwissenschaftlichen Diskussion immer die meiste Zeit beansprucht. Die projektive Geometrie ist der gemeinsame Gesichtspunkt, der nun vieles selbstverständlich, weil homolog zur euklidischen Geometrie, erscheinen läßt. In dem Buch „Relativitätstheorie mit Zirkel und Lineal" ist das dargestellt worden. Inzwischen lassen sich Zeichnungen mit dem Computer sehr viel einfacher herstellen und variieren, so daß es an der Zeit ist, die noch viel weitergehenden Möglichkeiten der Darstellung der Geometrie gekrümmter Räume und damit die Anfangsgründe der Allgemeinen Relativitätstheorie und Kosmologie einzubeziehen und den Zusammenhang von Physik und Geometrie in größerer Vollständigkeit darzustellen.

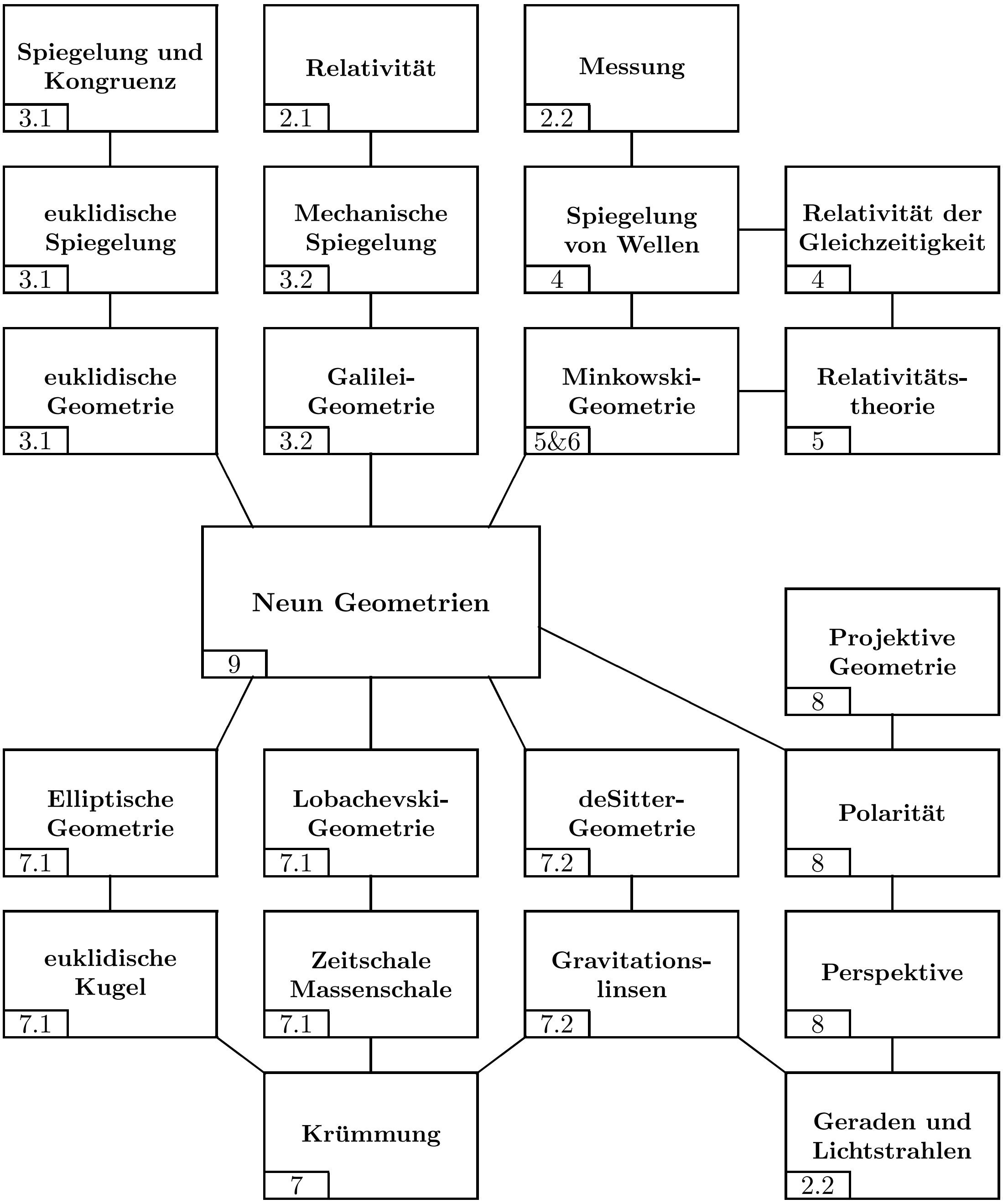
Berühmte Physiker und Mathematiker haben sich immer wieder zum Zusammenhang von Physik und Geometrie geäußert, darunter Kant, Helmholtz, Poincaré, Einstein und Hilbert. Jedoch trifft man nur vereinzelt auf elementare Illustrationen dieser grundlegenden Frage beider Gebiete. Hier setzt das vorliegende Buch an. Es stellt die geometrischen Eigenschaften von Raum und Zeit in den Zusammenhang mit Grundlagen der Mechanik und Kosmologie. Dabei strebt es keine vollständige Darstellung der beiden Gebiete an, sondern versucht die Nahtstelle so zu veranschaulichen, wie es weder auf der einen noch auf der anderen Seite gewöhnlich geschieht. Es setzt keine über den Schulstoff hinausgehenden Kenntnisse von Geometrie und Mechanik voraus, aber die Offenheit, über das Angebot nachzudenken und sich anstoßen zu lassen, in die Gedankenwelt beider Gebiete einzudringen. Mit welcher Vorkenntnis der Leser das Buch auch in die Hand nimmt, er wird überrascht sein, wie weit er bereits auf elementarer Stufe in das jeweils andere Gebiet hineingreift, und inwieweit das eine Gebiet von dem anderen abhängt. Der Text ist – so gut es geht – von Formalisierung freigehalten in dem Glauben, daß die Abbildungen das euklidische *„siehe"* ermöglichen. Der Leser soll ungestört die ästhetische Seite aufnehmen können. Für das weitergehende Interesse wird der formale Aspekt in den Anhängen dargestellt.

Weder Mechanik noch Geometrie sollen von Anfang an axiomatisch eingeführt werden. Statt dessen sollen der Weg von einfacheren zu komplizierteren Erfahrungen nachgezeichnet und nicht nur der gegenwärtige Glaube, sondern auch einige Zwischenschritte, dargestellt werden, auch wenn diese später zu korrigieren sind. Um mit Einstein zu sprechen, wird zuerst ein wenig auf dem Boden herumgeschnüffelt, bevor das hohe Roß der Verallgemeinerung bestiegen wird.

Für die Freude, die mir die Herstellung des Buches gemacht hat, ist vielerlei Dank abzustatten, der beim Geometrieunterricht in der Schule beginnt und bei den Arbeitsmitteln im Institut endet, Ermutigung, Diskussion und praktische Hilfe einschließt. Besonders danken möchte ich E.Quaisser für wichtigen Rat, H.-J.Treder für die vielen Diskussionen zu den prinzipiellen Fragen des Themas, S.Liebscher für die Unterstützung bei der Computertechnik und K.Liebscher für ihre Unterstützung und Geduld. J.Barbour und R.Schmidt haben das Manuskript kritisch durchgesehen. Besonderer Dank gilt S.Antoci, der mit DAOS (Devil's Advocate Online Service) ein wenig italienischen Geist beigetragen hat, dem der Leser an verschiedenen Stellen begegnen wird.

Potsdam, Februar 1999 Dierck-E.Liebscher

Aufbau des Buches



Inhaltsverzeichnis

Bezeichnungen

$[...]$	Liste von Koordinaten, speziell Liste von Variablen einer Funktion, auch Spatprodukt, Gl. (C.7)
$\langle ... \rangle$	Skalarprodukt, Gl. (C.4)
$\times$	Kreuzprodukt, Gl. (C.5)
$A \times B$, AB	Gerade, die die Punkte A und B verbindet
$g \times h$, gh	Schnittpunkt der Geraden g und h
$A \circ B$	direktes Produkt, Gl. (C.10)
$A, B, ...$	Punkte
$a, b, ...$	Geraden
$\alpha, \beta, ...$	Ebene, auch Winkel
$\mathcal{A}, \mathcal{B}$	Koeffizientenmatrizen des absoluten Kegelschnitts
$\mathcal{D}$	Rotation, auch Doppelverhältnis
$\mathcal{D}[A, B; E, F]$	Doppelverhältnis, Gl. (8.1)
Δ	Dreieck, Differenz, Zuwachs
δ^i_k	Koeffizienten der Einheitsmatrix, 0 für verschiedene, +1 für gleiche Indizes
$d[A, B]$	Abstand zwischen den Punkten A und B
$\mathcal{E}$	Einheitsmatrix
ε^{ikl} , ε_{ikl}	Permutationssymbol 0 für zwei übereinstimmende Indizes, -1 für ungerade, +1 für gerade Permutationen
$E, F,\ F_1, F_2$	Fixpunkte auf einer Geraden
$F[h]$	Fußpunkt der Geraden h
$\mathcal{G}$	Gruppe
$\mathcal{G}[\mathcal{A}, \boldsymbol{v}]$	Element der Galilei-Gruppe, Abschnitt B.2
g_{ik}	metrischer Tensor, Abschnitt B.3
$\mathcal{I}$	Involution
$\mathcal{K}$	Kegelschnitt
$k[A]$	Tangente aus dem Punkt A an den Kegelschnitt $\mathcal{K}$
$K[g]$	Schnittpunkt der Geraden g mit dem Kegelschnitt $\mathcal{K}$
$\mathcal{L}[\mathcal{A}, \boldsymbol{v}]$	Element der Lorentz-Gruppe, Abschnitt B.2
$\boldsymbol{n}$	Richtungsvektor

$\mathcal{P}$	Polarität
$p[A]$	Polare des Punktes A
p	absolute Polare für alle Punkte
$\pi[A]$	Polarebene zum Punkt A im projektiven Raum
$P[g]$	Pol der Geraden g
P	absoluter Pol aller Geraden
$\boldsymbol{p}$	Impulsvektor
p_k	Viererimpuls, Anhang B
$\Pi[a]$	Umfang eines Kreises mit Radius a, Anhang E
$\Sigma[\alpha]$	verallgemeinerter Sinus, gleich dem Verhältnis der projizierenden Linie zur projizierten Seite eines Winkels, Anhang E
$\mathcal{S}$	Spiegelung, auch Erzeugendensystem der Bewegungsgruppe
s	Linie an der gespiegelt wird
$S[A]$	Spiegelbild des Punktes A
$S_g[A]$	Spiegelbild des Punktes A an der Geraden g
$\mathcal{T}$	Transformation
u^i	Vierergeschwindigkeit, Anhang B
$\boldsymbol{v}$	(dreidimensionaler) Geschwindigkeitsvektor

Kapitel 1

Einleitung

Zeichnen ist das erste Mittel, unser Verständnis von der Welt zu formen. Das gilt für das Kleinkind, den Künstler, den Ingenieur, den Mathematiker. In der Schule lernen wir, wie aus den Darstellungen konkreter Gegenstände eine Geometrie sublimiert wird, mit der darauf die gleichen Bilder *ohne* Bezug auf ihre Bedeutung analysiert werden können. Die Dinge im Raum werden auf die Tafel projiziert, und wir lernen, wie sich dabei ihre Form verändert. Wir erinnern uns auch an die merkwürdigen Eigenschaften der Dreiecke, zum Beispiel an den gemeinsamen Punkt, den die Lote haben, die wir aus den Ecken auf die gegenüberliegenden Seiten fällen können, oder auch an den Halbkreis über der langen Seite eines rechtwinkligen Dreiecks, auf dem dann die gegenüberliegende Ecke liegt, oder auch an das Ergebnis, daß die Summe der Quadrate über den Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks gleich dem Quadrat über der Hypotenuse ist. Manche von uns werden sich an den Eindruck erinnern, den der logische Zusammenhang hervorruft, der sich in der Herleitung aus einfachsten Axiomen zu erkennen gibt. Thales, Pythagoras, Euklid sehen uns an.

Die Zeit scheint etwas grundsätzlich Anderes als der Raum zu sein. Gewöhnlich wird sie in der Geometrie überhaupt nicht erwähnt. Die Physik erweckt den Eindruck, daß man ohne die Leibniz-Newtonsche Differentialrechnung ohnehin nicht viel über sie aussagen kann. Räumliche Formen haben den Aspekt der Stabilität, die Zeit dagegen offenbart sich im Wandel. Erst Einsteins Relativitätstheorie hat gezeigt, daß ein tiefer Zusammenhang zwischen Raum und Zeit besteht, der Teil eines Zusammenhangs von Geometrie und Physik ist. Es wurde deutlich, daß die Elementargeometrie auf Raum *und* Zeit angewandt werden kann und muß. Es wurde ebenso deutlich, daß es die physikalische Beobachtung ist, die entscheidet, wie die Geometrie aussehen muß, wenn sie auf Erscheinungen der realen Welt anwendbar sein soll, und daß es einer sorgfältigen und elementaren Analyse der Experimente bedarf, will man Mißverständnisse vermeiden.

Gewöhnlich stellt man sich die Bewegung von Gegenständen im Raum nicht als geometrische Figur in der Raum-Zeit-Union vor. Der Eingeweihte ist mit der analytischen Rechnung ohnehin schneller als mit der Auswertung einer Zeichnung. Schon

Newton hat die geometrischen Aufgaben der Académie Française analytisch gelöst, bevor er das Ergebnis in einen geometrischen Beweis bettete. Abbildungen werden bestenfalls als Hilfsskizzen benutzt. Der Außenstehende sieht in der Relativitätstheorie ein System mehr oder weniger komplizierter Formeln, die sich einem intuitiven Verständnis verschließen. Wir wollen hier aber gerade zeigen, daß die Grundlagen der Relativitätstheorie sehr wohl durch geometrische Intuition erschlossen werden können und daß die Kinematik der Relativitätstheorie nichts anderes ist als die Geometrie der Raum-Zeit-Union. Wir werden lernen, Raum und Zeichenblatt als Raum-Zeit-Diagramme mit einer oder zwei Raumdimensionen zu lesen.

Eine theoretische Konstruktion, die in elementargeometrischer Form dargestellt und als Gegenstand elementargeometrischer Erfahrung ausgewertet werden kann, läßt uns in weit stärkerem Maße innere Konsistenz erwarten als dies bei einer analytischen und für den Außenstehenden schwer nachzuvollziehenden Rechnung der Fall ist. Deshalb soll in diesem Buch auch gezeigt werden, wie elementare Geometrie, Mechanik und die elementaren Eigenschaften des Universums miteinander verwoben sind. Wir werden das nicht mit aller Strenge tun, die leicht in der Literatur zu den Teilgebieten zu finden ist. An deren Stelle sollen die tatsächlichen Konstruktionen und die Analogien sprechen, die den oft überraschend ästhetischen Charakter der Geometrie hervortreten lassen. In gewissem Sinne heißt das, sich zwischen alle Stühle zu setzen. Die unerwarteten und erstaunlichen Zusammenhänge werden uns aber entschädigen. Wir werden die Geometrie von Raum und Zeit darlegen und mit elementaren Mitteln zeigen,

- wie physikalisch elementare Experimente geometrisch interpretiert werden können,
- wie physikalische Experimente die Eigenschaften anwendbarer Geometrie bestimmen,
- wie geometrische Eigenschaften die korrekte physikalische Interpretation erzwingen.

Die Abbildungen sind mit der im Anhang dargestellten Algebra berechnet und zum größten Teil mit IDL hergestellt.

In Kapitel 2 verwenden wir graphische Fahrpläne als elementare gemeinsame Darstellung von Raum und Zeit, die direkt Raum-Zeit genannt wird. Wir lernen die einfachsten Mittel, in einer Raum-Zeit-Ebene zu zeichnen. Hier wird mit vielen Beispielen und Zeichnungen gearbeitet, die an das Lesen einer ebenen oder räumlichen Anordnung als Fahrplan gewöhnen sollen. Schließlich liegt hier der Schlüssel zum Verständnis der Abbildungen in den folgenden Kapiteln. Kapitel 3 stellt die grundlegende Bedeutung der Spiegelungen dar. Diese überrascht zunächst, weil hier *reale* Bewegungen in zwei Spiegelungen zerlegt werden, die ihrerseits ja nur *virtuelle* Bilder erzeugen. In unseren Fahrplänen sind dagegen Spiegelungen viel einfacher als andere Bewegungen. In Kapitel 3 werden wir einen ersten Eindruck von der Fremdartigkeit der Geometrie in einem Fahrplan erhalten. Kapitel 4 behandelt dann das zentrale Problem der Einsteinschen (Speziellen) Relativitätstheorie. Diese war 1905 der Ausgangspunkt, eine andere als die euklidische Geometrie in der Physik überhaupt in Betracht zu ziehen. Wir korrigieren die Spiegelungsvorschrift aus Kapitel 3 und lösen das Problem in der Geometrie der Raum-Zeit, die Minkowski-Geometrie heißt. Die paradox anmutenden Tatsachen der Relativitätstheorie werden in Kapitel 5 mit Hilfe dieser Geometrie beschrieben. Die elementaren Eigenschaften von Minkowski-Geometrie und euklidischer Geometrie der Ebene werden in Kapitel 6 verglichen. Kapitel 7 bildet diesen Vergleich auf der homogen gekrümmten Fläche nach, wobei wir immer in der Nähe physikalischer Beispiele bleiben. Kapitel 8 bespricht die grundlegenden Begriffe der projektiven Geometrie, die in Kapitel 9 die gefundenen Geometrien als eine Familie – die Cayley-Klein-Geometrien – darstellt. Diese Familie kann axiomatisch charakterisiert werden, wie man das von Geometrien auch erwartet. Kapitel 10 nimmt die allgemeinen Fragen noch einmal auf, die sich auf die physikalische Interpretation beziehen.

Alle in diesem Buch verwendeten Begriffe sind Gegenstand wohldefinierter und gut begründeter Theorien. Wir wollen diese selbst nicht wiederholen, da wir an der Nahtstelle interessiert sind, wo die Begriffe manchmal nicht zu scharf sein dürfen, damit man die Paßform leicht sieht. Der formale Hintergrund der Geometrie ist deshalb in einem Anhang zusammengefaßt. Anhang A bespricht die Bewegungsgruppen und ihre Erzeugung durch Spiegelungen. Anhang B behandelt die Koordinatensysteme, die seit der Zeit von Descartes die Anwendung analytischer Methoden zu Konstruktion und Beweis erlauben. Die Anhänge C und D formalisieren die in den Kapiteln 8 und 9 verwendeten Begriffe der projektiven Geometrie, Anhang E die Klassifikation der Cayley-Klein-Geometrien. Dort wird auch der formale Zusammenhang zwischen den metrischen Räumen in der Differentialgeometrie und den metrisch-projektiven Ebenen hergestellt. Um einen schnellen Zugriff auf Begriffsbestimmungen herzustellen, ist am Buchende ein Glossar angefügt.

Zu Geometrie und Relativitätstheorie gibt es eine umfangreiche Literatur. Hier soll nur auf einen Ausschnitt aus dem Teil hingewiesen werden, der sich näher mit unseren Themen befaßt. Einige Arbeiten sind der geometrischen oder grafischen Darstellung der Relativitätstheorie verpflichtet [13, 28, 52, 70, 71, 79, 86, 96, 105, 106, 122]. Es gibt elementare [83, 95, 109, 132] und weniger elementare [18, 45] Einführungen in die Relativitätstheorie, auch in die allgemeine Relativitätstheorie [124] und Kosmologie [40, 57, 87, 135]. Die darstellende und projektive Geometrie kann man in älteren [12, 15, 26, 27, 31, 113] und neueren Büchern lernen [14]. Ausführliches zur nichteuklidischen Geometrie liest man u.a. in [21, 76]. Allgemeine Einführungen in die Geometrie findet man u.a. in [6, 10, 11, 25, 50, 77]. Die räumliche Vorstellung wird u.a. in [100, 102] angesprochen. Es gibt auch Spezielles zur Anwendung in der Computergrafik [98].