Kapitel 3

Spiegelung und Stoß

3.1 Geometrie und Spiegelung

In diesem Abschnitt verlassen wir die Physik für einen Moment und beschäftigen uns mit den Grundbegriffen der Geometrie, an die wir anknüpfen wollen. Wir werden die Art Konstruktionen herausfinden, die wir zum Bau einer Geometrie der Raum-Zeit benötigen. – Allgemein verstehen wir unter einer *Geometrie* die Beziehungen, die sich ergeben, wenn wir eine Verabredung treffen können, welche Figuren wir als gleich gestaltet, als kongruent ansehen wollen. Wie schon beschrieben, ist „gleich gestaltet“ eine allgemeiner als gewohnt zu definierende Eigenschaft, die direkt auf die aktuell zugelassenen Transformationen Bezug nimmt. Beispielsweise können – zusätzlich zur euklidischen Auffassung – auch solche Figuren als gleich gestaltet angesehen werden, die euklidisch ähnlich sind, nämlich dann, wenn die Dilatationen unter die erlaubten Bewegungen gerechnet werden, was man ja in der euklidischen Geometrie nicht darf.

In der euklidischen Geometrie ist Kongruenz mechanisch nachvollziehbar, wenn wir versuchen, entsprechende Figuren durch eine Kombination von Verschiebungen und Verdrehungen in eine übereinstimmende Lage zu bringen. Dabei ist zunächst an ein Verschieben und Verdrehen der materiellen Körper gedacht, welche die Figuren tragen. Was sich dabei im Einzelnen als kongruent herausstellt, muß deshalb von den physikalischen Gesetzen abhängen, denen die reale Bewegung und Formung eines festen Körpers unterworfen ist. Allgemein nennt man jedoch *alle* Veränderungen, die definitionsgemäß kongruente Figuren ineinander überführen, *Bewegungen.* Da die Kongruenz Gleichwertigkeit bedeuten soll, müssen die Bewegungen eine *Gruppe* bilden. Bewegungen sind umkehrbar und zusammensetzbar. Die triviale Bewegung, bei der nichts weiter geschieht, nehmen wir als die Eins der Bewegungsgruppe. Geometrie ist in diesem Sinne die Möglichkeit, äußere Eigenschaften einer Figur (Lage und Orientierung) von ihren inneren zu trennen. Physikalisch heißt das, wir können an unseren Objekten Operationen ausführen, die einen Komplex von Eigenschaften unverändert lassen, die wir dann innere Eigenschaften (im einfachsten Falle Gestalt) nennen. Gleichheit der inneren Eigenschaften ist dann Kongruenz, und die erlaubten Operationen bilden die Bewegungsgruppe. – Zunächst verstehen wir unter Bewegungen die Verschiebungen, Verdrehungen und ihre Kombinationen (Schraubungen) im Raum. Wie nun Drehungen in einer *Welt* aus Raum und Zeit aussehen können, wird uns die physikalische Erfahrung zeigen. Wir müssen uns eine Methode verschaffen, physikalisch die Verschiebungen und Drehungen in einer Welt zu konstruieren, um eine Vorstellung davon zu bekommen, wie Bewegungen darzustellen sind. Danach kann dann immer noch eine abstrakte Definition gesucht werden.

Wir lernen schon in der Schule, daß (euklidische) Verschiebungen und Drehungen aus zwei *Spiegelungen*[1] zusammengesetzt werden können. Das ist für uns von Bedeutung, weil wir mechanische Realisierungen einer Spiegelung leicht verstehen können und die Gesamtheit der Spiegelungen in dieser Hinsicht einfacher als die der Bewegungen ist. Dennoch ist die Spiegelung an einer Geraden (im Raum an einer Ebene) zunächst keine Bewegung, die sich aus Verschiebung und Drehung zusammensetzt. Im Raum der täglichen Erfahrung erzeugt die Spiegelung immer ein virtuelles, ungreifbares Bild. So scheint die Reduktion der (reellen) Bewegungen auf (virtuelle) Spiegelungen zunächst nur eine abstrakte Konstruktion. Wir finden aber so die Form von Bewegungen in einer Welt, d.h. unter Einschluß der Zeit.

Die Spiegelung ist eine besonders einfache Operation, weil sie zu sich selbst invers ist: Dieselbe Spiegelung, die aus dem Gegenstand das Bild herstellt, führt das Bild wieder in die Lage des Gegenstands über. Die praktische Feststellung der Kongruenz von Objekten hängt nun davon ab, daß die Eigenschaften der Spiegelung richtig erkannt und verknüpft werden. Jedermann hat im geteilten Toilettenspiegel schon festgestellt, das ein zum zweiten Mal gespiegeltes Bild nicht mehr seitenvertauscht, sondern nur noch gedreht ist (Abb. 3.1). Stehen wir zwischen zwei parallelen verspiegelten Wänden, sehen wir uns in einer langen Linie angetreten, immer abwechselnd seitenverkehrt und seitengerecht verschoben. Die doppelte Spiegelung an parallelen Spiegeln läuft auf eine Verschiebung hinaus. Das vollendet die Eigenschaft der Spiegelungen, die Rotationen und Translationen zu erzeugen. Die Spiegelungen erzeugen alle Bewegungen [4] und definieren damit auch den Längen- und Winkelvergleich als Kongruenz von Strecken und Winkeln.

Der wichtigste aller Winkel ist dabei der rechte Winkel. Eine Gerade steht *lotrecht* auf einem Spiegel $\mathcal{S}$, wenn sie mit ihrem Spiegelbild zusammenfällt. Ein rechter Winkel, gespiegelt an einem seiner Schenkel, wird durch das Spiegelbild zu einem gestreckten Winkel ergänzt. Die Verbindung eines Punktes A mit seinem Spiegelbild $S[A]$ ist das *Lot* aus A auf die spiegelnde Gerade. Der Spiegel ist der geometrische Ort aller Punkte Q, die von A und seinem Spiegelbild $S[A]$ gleich weit entfernt sind. Der

[1] In der Ebene sind hier Spiegelungen an Geraden gemeint. Sieht man eine Spiegelung nur als Involution an, die sich selbst umkehrt, wenn sie ein zweites Mal angewendet wird, gibt es auch andere Konstruktionen [143]. In unserem Zusammenhang werden noch Punktspiegelungen wichtig, die in der Ebene auch als Drehung um einen gestreckten Winkel und als Produkt der Spiegelungen an zwei aufeinander senkrechten Geraden durch den fraglichen Punkt angesehen werden können (Anhang A).

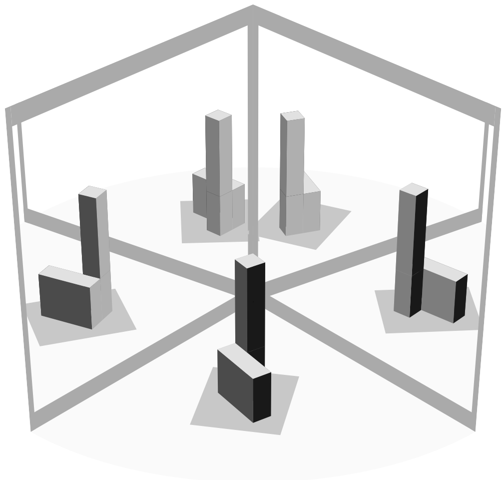

Abbildung 3.1: Doppelte Spiegelung ist Drehung

Setzen wir einen Baustein zwischen zwei Spiegel, sehen wir zuerst die einfachen Spiegelbilder des Bausteins (außen). In jedem der beiden Spiegel sehen wir aber auch den anderen mit seinem Spiegelbild des Bausteins gespiegelt. Die nun doppelt gespiegelten Bilder (hinten) sind gegen den Baustein schlicht verdreht. Die Drehachse ist die Schnittgerade der beiden Spiegel.

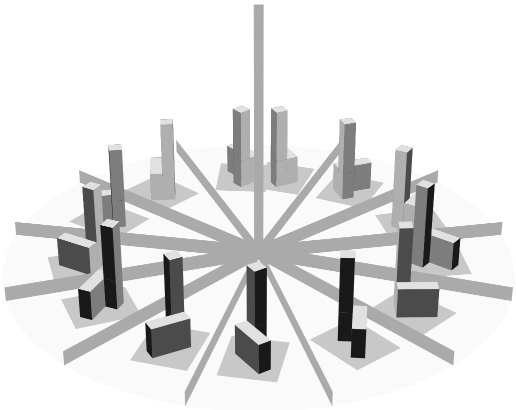

Abbildung 3.2: Mehrfachspiegelung in einer Ecke

Dies ist der Anblick einer Szene, in der das Objekt in eine engere spiegelnde Ecke gestellt ist. Die Bilder einer geraden Zahl von Reflexionen bilden eine, die der ungeraden eine andere Familie von Bildern, die gegeneinander nur gedreht erscheinen. Die Orte entsprechender Punkte liegen auf Kreisen.

Spiegel halbiert die Winkel $\angle AQS[A]$. Wir werden dies viele Male illustrieren. Mit diesen Definitionen ist verabredet, wie Längen und Winkel verglichen werden sollen. Die entscheidende Einsicht besteht darin, daß die Beschreibung eines rechten Winkels auf die Spiegelung zurückgreifen muß, so wie die Beschreibung einer Spiegelung auf den rechten Winkel zurückgreift. Eines von beiden muß also explizit durch freie Wahl gegeben sein. Wir wählen die Spiegelungen und bestimmen aus ihnen die Bewegungsgruppe, d.h. die Geometrie.

Wir merken nur an, daß die gewöhnliche Konstruktion eines Lotes genau umgekehrt verläuft: Man beginnt mit den metrischen Eigenschaften, nimmt den Zirkel in die Hand und bestimmt die Schnittpunkte von Kreisen (Abb. 3.4). Wir gehen jetzt aber anders vor. Eben weil wir die Bewegungen im folgenden aus Spiegelungen herleiten wollen und müssen, sind Längen- und Winkelvergleich abgeleitete Konzepte. Auch der Kreis ist eine solche herzuleitende Konstruktion. Wenn wir jetzt daran denken, daß die Gleichung des Kreises in cartesischen Koordinaten unmittelbar die Aussage des Satzes von Pythagoras wiedergibt, sehen wir ein, daß eins der wichtigsten Ziele die Ableitung dieses Satzes aus den Eigenschaften der Spiegelung sein

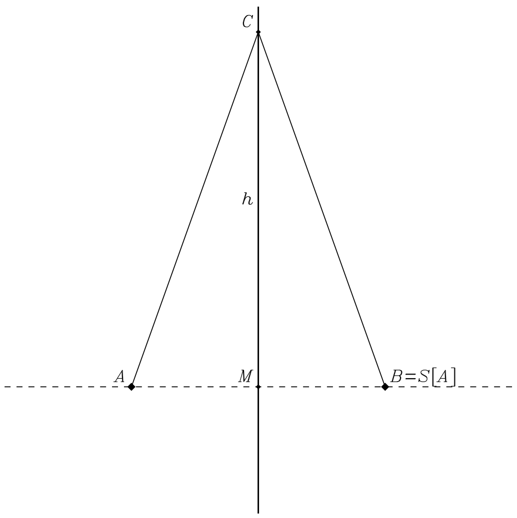

Abbildung 3.3: Das gleichschenklige Dreieck

Das Spiegelbild $B = S[A]$ eines Punktes A an der Geraden h bildet mit jedem Punkt C auf h ein gleichschenkliges Dreieck. Die Spiegelung soll auf die Vergleichbarkeit von Strecken auf verschiedenen Geraden und Winkeln mit verschiedenen Trägerpunkten führen. Wir wollen aus der Spiegelung immer schließen, daß die Strecken CA und $CS[A]$ gleich lang und die Winkel $\angle CAS[A]$ und $\angle CS[A]A$ gleich weit sind.

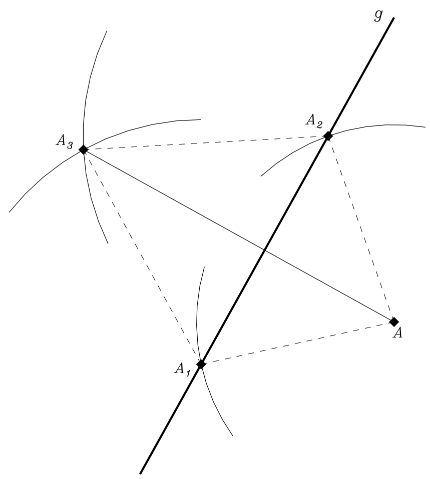

Abbildung 3.4: Die Konstruktion des Lots in der euklidischen Geometrie

Wir finden das Lot als Spiegel durch A, der die Gerade g auf sich selbst abbildet. Wir konstruieren zwei Punkte (A_1 und A_2) auf g, die von A gleich weit entfernt sind. Das Lot enthält dann alle anderen Punkte A_3, die auch gleich weit von A_1 und A_2 entfernt sind. Die zweite Diagonale des Drachenviereck $\Box AA_1A_3A_2$ ist das Lot.

muß[2]. Abbildung 3.5 zeigt den Beweis des Satzes, wie ihn Euklid benutzt hat. Jedes Kathetenquadrat ist gleich einem Teil des Hypotenusenquadrats:

$$\begin{aligned}
& b^2 = ACC_BA_B = ACQ_3Q_1 = A_CC_CQ_4A \\
& a^2 = BCC_AB_A = BCQ_3Q_2 = B_CC_CQ_4B \\
\longrightarrow \quad & a^2 + b^2 = ACC_BA_B + BCC_AB_A = A_CB_CBA = c^2 \ .
\end{aligned}$$

Abbildung 3.6 zeigt ein Parkett, in dem die euklidische Pythagoras-Figur eingebaut ist. Die Auswertung der Flächen erfolgt hier über den binomischen Lehrsatz.

Nun scheint es so, daß wir nur einige Involutionen aussuchen müssen, sie dann als Spiegelungen ansehen und die Bewegungsgruppe generieren können und so eine Geometrie erhalten. Jedoch sind wir nicht völlig frei, wenn wir verabreden, was eine Spiegelung sein soll, wie eine Spiegelung wirken soll. Wir wollen ja mit Hilfe der Spiegelungen einen Längenvergleich durchführen. Wir wollen die Länge so bestimmen,

[2] In Abschnitt B.3 skizzieren wir die grundlegende Rolle, die dieser Satz in der Geometrie allgemein gekrümmter Räume hat.

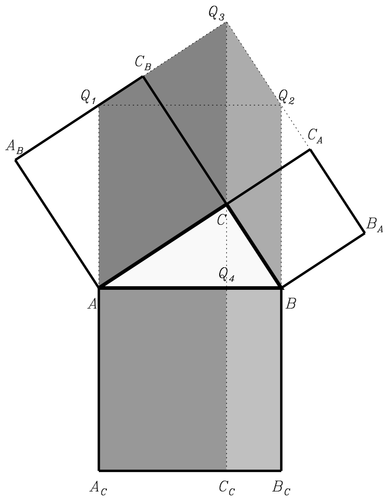

Abbildung 3.5: Der Satz des Pythagoras in der euklidischen Geometrie

Diese bekannte Figur zeigt die Quadrate über den Seiten eines euklidisch rechtwinkligen Dreiecks ΔABC. Der Flächenvergleich stützt sich darauf, daß die Fläche eines Parallelogramms das Produkt aus Grundlinie und Höhe ist.

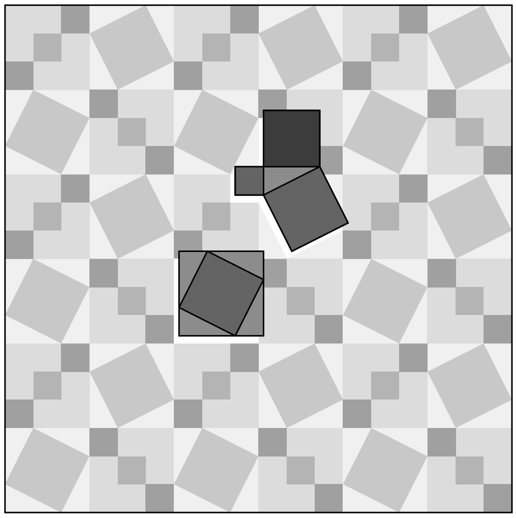

Abbildung 3.6: Ebenes Parkett mit Satz des Pythagoras

Dieses Parkett gestattet die Auswertung mittels des binomischen Lehrsatzes, wie das kombinierte Quadrat zeigt: $c^2 = (a+b)^2 - 2ab$ nach Konstruktion, und das ist $c^2 = a^2 + b^2$.

daß ein Punkt A und sein Spiegelbild $S[A]$ gleich weit von den Punkten der spiegelnden Gerade ist. Das kann nur dann widerspruchsfrei sein, wenn sich die Mittelsenkrechten eines Dreiecks in einem Punkt schneiden. Der Mittelsenkrechtensatz bezieht nämlich die Interpretation direkt auf die Transitivität der Gleichheit: Schneidet sich die Mittelsenkrechte von AB mit der von BC im Punkte M, dann sind die Distanzen einmal $d[A, M] = d[B, M]$, zum andern $d[B, M] = d[C, M]$. Wegen der Transitivität der Gleichheit (einem Axiom der Logik) ist nun auch $d[A, M] = d[C, M]$. Nach unserer Forderung liegt also M auch auf der Mittelsenkrechten von CA. Die drei Mittelsenkrechten schneiden sich in einem Punkt, in M. Nun ist die Spiegelung zunächst als allgemeine involutorische Abbildung definiert. Um unsere Absicht der Induktion eines Längenvergleichs widerspruchsfrei ausführen zu können, muß der Mittelsenkrechtensatz wie in der euklidischen Geometrie gelten.

Wir werden in den folgenden Kapiteln demonstrieren, warum und wie wir das Vorgehen der euklidischen Geometrie homolog auf andere Geometriegebäude – speziell die Geometrie der Welt – übertragen müssen. Dabei versuchen wir, den Aufbau der Geometrie immer mit den Eigenschaften der Spiegelung [4, 51, 116] zu beginnen, weil diese sich am einfachsten auf eine Welt übertragen lassen.

3.2 Die Spiegelung mechanischer Bewegung

In diesem Abschnitt wenden wir uns wieder der Physik zu und erfahren, was uns an Ungewohntem in der Geometrie der Raum-Zeit erwartet. Die kräftefreie mechanische Bewegung wird durch das erste und – in weiterem Sinne – das dritte Newtonsche Axiom definiert. Das erste Newtonsche Axiom stellt fest, daß die kräftefreien Bewegungen eine Geradenschar in der Welt bilden. Mit einem geeigneten Grundnetz solcher Geraden kann man entsprechende Orts- und Zeitkoordinaten, Längen und Intervalle definieren[3] [84, 131]. Ist das geschehen, bestimmen wir Geschwindigkeiten, die ihrerseits die Neigung in einem Koordinatensystem (Anhang B) darstellen, also eine Funktion des Winkels in der Welt sein müssen. Diese Geschichte wird auch noch im folgenden Kapitel erzählt.

Der einfachste Bewegungsablauf, der über die freie Bewegung hinausgeht, ist der Stoß zweier Teilchen. Bis auf ein kurzes Zeitintervall ist die Bewegung kräftefrei. In diesem kurzen Zeitintervall ändert sich die Bewegung der einzelnen Partner. Wir können hier von den Details zunächst absehen und uns darauf beschränken, vor und nach dem Stoß Bilanz zu ziehen. Der Versuch, eine allgemeingültige Bilanz der Geschwindigkeiten vor und nach dem Stoß aufzustellen, schlägt allerdings fehl. Die (komponentenweise) Summe der Geschwindigkeiten *ändert* sich bei einem allgemeinen Stoß[4]. Die ebenso merkwürdige wie fundamentale Erfahrung ist nun, daß dennoch eine Bilanz aufgemacht werden kann, wenn man die Geschwindigkeiten wichtet, d.h. mit Faktoren versieht. Diese Faktoren nennen wir Masse, genauer *träge Masse*, um sie von anderen Arten von Masse zu unterscheiden, die wir noch kennenlernen werden, und schreiben für sie m. Die träge Masse erweist sich als stabile Eigenschaft der Körper, deren Stoß wir beobachten. Sie ist unabhängig von den speziellen Umständen des einzelnen Versuchs.

Addiert man die mit der jeweiligen trägen Masse des Körpers gewichteten Geschwindigkeiten freier Körper vor einer Wechselwirkung – einem Stoß –, so erhält man nichts anderes als bei der Bilanz nach dem Stoß. Die Summe der trägen Massen bleibt ebenfalls erhalten.

[3] Wenn wir nur einzelne kräftefreie Bewegungen beobachten könnten, wäre das eine leere Aussage. Tatsächlich beobachten wir aber eine 6-parametrige Schar kräftefreier Bewegungen. Die Lage und Zahl der Schnittpunkte innerhalb dieser Schar zeigt, daß die Linien Geraden sind und daß dies nicht trivial ist, d.h. ganz anders sein könnte. Eine spezielle Frage ist das Minimum freier Teilchen, das die Konstruktion eines Bezugssystems gestattet. Ludwig Lange [84] fand vier Teilchen, die von einem Punkt ausgehen. Bei windschiefer Lage der Weltlinien sind drei Teilchen ausreichend [131]. Wichtig bleibt in jedem Falle, daß die Bewegung der Teilchen aufeinander bezogen werden muß und daß das Gefäß, als das der Raum üblicherweise aufgefaßt wird, immer von dem uns umgebenden Universum bereitgestellt wird [136, 9, 8].

[4] Geschwindigkeiten werden gewöhnlich durch die Angabe ihrer drei Komponenten in die drei Richtungen des Raums angegeben. Die Kombination der drei Werte wird in Formeln durch halbfette Buchstaben angezeigt.

Darüber hinaus sind die Massen unabhängig von den Umständen des Stoßes im einzelnen, sie scheinen nur mit inneren Eigenschaften der Stoßpartner korreliert. Wir nennen das Produkt aus träger Masse m und Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}$ *Impuls*. Impulse werden gleichzeitig mit den Massen addiert, und Multiplikation der Masse mit einem Faktor heißt, daß auch der Impuls mit diesem Faktor multipliziert werden muß. Deshalb bilden wir aus der Masse und den drei Impulskomponenten einen vierkomponentigen Vektor. Er heißt *Viererimpuls*, um ihn vom Impuls im dreidimensionalen Raum zu unterscheiden den wir oben bestimmt haben. In einem allgemeinen Stoß bleibt die Summe der Viererimpulse erhalten. Dieser *Impulserhaltungssatz* ist das Fundament der Dynamik. Er wurde von Christiaan Huygens formuliert und ist äquivalent zu Newtons drittem Axiom[5], das feststellt, daß sich die Summe wechselseitiger Kräfte immer aufhebt. Wir konstruieren den Gesamtviererimpuls mit einem Impulsparallelogramm (Abb. 3.7 und 3.8). An dieser Stelle ist wichtig, daß die Diagramme in der mv-m-Ebene (Abb. 3.8) den in der x-t-Ebene ähnlich sein *müssen*. Das gilt auch im Vierdimensionalen, weil die Massen richtungsunabhängig sind. *Eine Spiegelung in der Raum-Zeit geht mit der gleichen Spiegelung im Impulsraum einher.*

Der allgemeine Erhaltungssatz soll nun am Beispiel von Stößen zweier Teilchen dargestellt werden. Zuerst betrachten wir den total unelastischen Fall. Hier bindet der Stoß die Partner und formt ein neues Objekt. Was ist seine Geschwindigkeit? Das dritte Newtonsche Axiom in der Huygensschen Form nimmt die Form einer Mischungsregel an. Die Geschwindigkeit $\boldsymbol{V}$ des im total unelastischen Stoß gebildeten Körpers ist das gewogene Mittel der Geschwindigkeiten $\boldsymbol{v}_1$ und $\boldsymbol{v}_2$ vor dem Stoß,

$$\boldsymbol{V} = \frac{m_1\,\boldsymbol{v}_1 \;+\; m_2\,\boldsymbol{v}_2}{m_1 + m_2}\;, \quad M = m_1 + m_2\;. \tag{3.1}$$

Addiert man die Geschwindigkeiten vor dem Stoß nach Wichtung mit den jeweiligen trägen Massen, erhält man die Geschwindigkeit des neuen Objekts, multipliziert mit der Gesamtmasse. In gewissem Sinne ist das Gegenteil des total unelastischen Stoßes der ideal elastische Stoß. Hier behalten alle Stoßpartner ihre inneren Eigenschaften (speziell die innere Energie) und wechseln nur die Geschwindigkeiten. Die allgemeine Erhaltung der Energie findet sich in der Unveränderlichkeit der Summe der kinetischen Energien $\frac{1}{2}m\boldsymbol{v}^2$. Die in Gleichung (3.1) berechnete Geschwindigkeit $\boldsymbol{V}$ ist nun die Geschwindigkeit des *Schwerpunkts*. Beziehen wir uns auf diese Geschwindigkeit, dann ergibt sich für die Geschwindigkeiten $\boldsymbol{v}'$ nach dem Stoß

$$\boldsymbol{v}'_1 - \boldsymbol{V} = -(\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{V})\;, \quad \boldsymbol{v}'_2 - \boldsymbol{V} = -(\boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{V})\;. \tag{3.2}$$

Die Relativgeschwindigkeiten wechseln ihr Vorzeichen, die Partner werden reflektiert[6]. Abbildung 3.9 zeigt Impulsdiagramme eines solchen elastischen Stoßes

[5] Man könnte es gleich Huygens' Axiom nennen. Es wurde ausführlich in seinen nachgelassenen Schriften veröffentlicht [61]. Das Konzept ist älter noch als Newtons Principia.

[6] Newton nannte die Stöße generell *reflections*.

für vier verschiedene Massenverhältnisse, aber immer gleiche Anfangsgeschwindigkeiten. Nach dem Stoß bilden die möglichen Bewegungen jedes Partners einen eigenen Kegel um die Richtung der Schwerpunktsbewegung. Die Öffnungen sind dabei umgekehrt proportional zu den trägen Massen. Die ungestörte Fortsetzung der Bewegung liefert immer eine der Mantellinien. Die Kegelöffnungen sind den Massen umgekehrt proportional. Unten rechts ist die stoßende Masse sehr viel kleiner als die gestoßene, links oben ist es umgekehrt. Oben ist die stoßende Masse schwerer als die gestoßene, unten leichter. Ist die Masse des einen Körpers sehr groß gegen die des anderen, so wirkt er selbst wie ein *Spiegel*: Seine eigene Geschwindigkeit verändert sich kaum, der andere kehrt einfach seine Relativgeschwindigkeit um. Abbildung 3.10 zeigt die Verhältnisse mit zwei Raumdimensionen.

Nach dieser Vorbereitung betrachten wir wieder einen Schwarm von Teilchen, die wie nach einer Explosion sich von einem Punkt des Raumes aus in alle Richtungen gleichzeitig und mit gleicher Geschwindigkeit in Bewegung setzen. Die Weltlinien sind alle Geraden und haben gleiche Neigung: Sie bilden einen Kegel (Abb. 2.11). Stellen wir den Teilchen einen ortsfesten Spiegel in den Weg, so finden wir eine erste physikalische Methode für die Spiegelung im Fahrplan (Abb. 3.11). Um eine Geometrie konstruieren zu können, fragen wir jedoch nach der Spiegelung an einer Ebene beliebiger Neigung. Eine solche Ebene ist der Fahrplan eines Spiegels, der sich gleichförmig bewegt, ohne seine Orientierung zu ändern. Wir stellen nun den Explosionsbruchstücken einen sich bewegenden Spiegel in den Weg. Auf Grund des Impulssatzes für den ideal elastischen Stoß finden wir tatsächlich wieder einen Kegel, der allerdings kein gerader Kegel mehr ist, sondern ein schiefer Kreiskegel (Abb. 3.12). Er hat jedoch eine eindeutige Spitze, das Spiegelbild $S[E]$ der Explosion E. Das ist die Konstruktion der Reflexion. Das Ergebnis $S[E]$ ist unabhängig von der gewählten Geschwindigkeit der Fragmente. In einem nur zweidimensionalen Fahrplan finden wir die Spiegelung auf physikalischem Wege, indem wir von einem Ereignis zwei Teilchen verschiedener Geschwindigkeit vom Spiegel zurückwerfen lassen und die gespiegelten Fahrpläne zurückverfolgen. Es springt ins Auge, daß diese Spiegelung ein *gleichzeitiges* Bild erzeugt, dessen gewöhnlicher Abstand vom Spiegel gleich dem des gespiegelten Ereignisses ist. Das ist der Sachverhalt den wir „natürlicherweise“ erwarten. Wir glauben, unser Bild im Spiegel immer in dem Moment zu sehen, in dem wir hineinschauen. Niemand kann irgendeine Verzögerung der Bewegung der Bildes gegen die eigene Bewegung bemerken.

Die erste Konsequenz dieser *absoluten Gleichzeitigkeit* ist die Definition eines merkwürdigen Abstands. Dieser raum-zeitliche Abstand ist *allein die zwischen den Ereignissen abgelaufene Zeit*. Nehmen wir zwei Ereignisse O und A und betrachten alle Spiegel, die O mit verschiedenen Geschwindigkeiten passieren. Alle Spiegelbilder von A sind gleichzeitig zu A. Andererseits muß der Abstand so definiert sein, daß alle Spiegelbilder ebenso weit von O entfernt sind wie A selbst. Der Abstand hängt also ausschließlich von der verstrichenen Zeit ab. Die relative räumliche Orientierung ist ohne Belang. Wir müssen zwei (Welt-)Strecken als gleich lang ansehen, wenn die zugehörigen Intervalle der Zeitkoordinate gleich groß sind (Abb. 3.13).

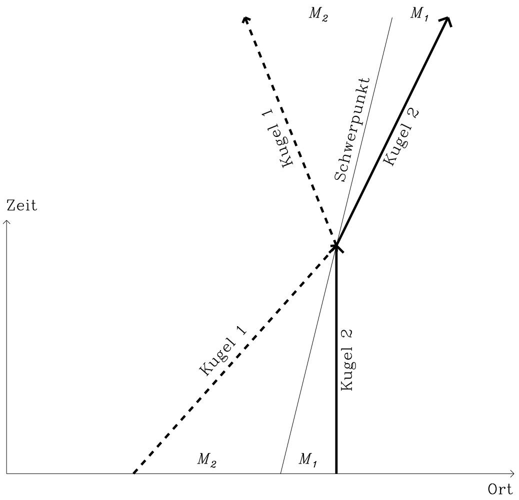

Abbildung 3.7: Impulssatz und träge Masse. I.

Wir konstruieren den Fahrplan eines allgemeinen eindimensionalen (zentralen) Stoßes zweier Billardkugeln verschiedener Masse. Kugel 2 wartet auf den Stoß durch Kugel 1. Nach dem Stoß wird Kugel 2 sich in die Richtung bewegen, in die sie gestoßen wurde. Kugel 1 kann – je nach Masse – ihr nachlaufen, stehenbleiben, oder zurückrollen. Wir können versuchen, eine Linie zu finden, welche die Geschwindigkeiten vor dem Stoß und nach dem Stoß in gleichem Verhältnis teilt. Diese Linie ist die Weltlinie des Schwerpunkts. Die Massen sind dann den Abständen von dieser Linie umgekehrt proportional.

Wir zeigen den Fall des ideal elastischen Stoßes: die Abstände der Endpunkte sind vor und nach dem Stoß gleich.

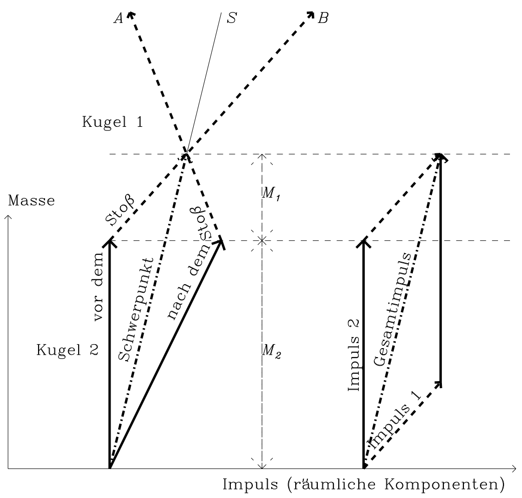

Abbildung 3.8: Impulssatz und träge Masse. II.

Wir zeichnen zur vorigen Abbildung die Summe der Geschwindigkeiten vor und nach dem Stoß. Diese Summen sind erst gleich, wenn die Geschwindigkeitsvektoren entsprechend ihrem Gewicht verlängert oder verkürzt, d.h., wenn die Impulse gebildet werden. Weil die Ordinate der Geschwindigkeit die Zeiteinheit war, ist die Ordinate der Impulse die träge Masse. Der Gesamtimpuls bleibt erhalten und hat im Fahrplan die Richtung der Weltlinie des Schwerpunkts. Dieser Schwerpunkt ist zu jeder Zeit das mit den gefundenen Massen gewichtete Mittel des Ortes.

Beim ideal elastischen Stoß sind die Abstände AS und SB gleich. Allgemein ist SB^2/AS^2 das Verhältnis der kinetischen Energien vor und nach dem Stoß.

Es folgt, daß verschiedene, aber gleichzeitige Ereignisse den raum-zeitlichen Abstand Null haben. Im Lichte der unmittelbaren Erfahrung des euklidischen Raums ist das neu und höchst merkwürdig. In einer *Raum-Zeit* ist dies jedoch typisch, und die folgenden Kapitel werden noch mehr Beispiele liefern. Wenn gleichzeitige Ereignisse den raum-zeitlichen Abstand Null haben, dann muß man sich nun fragen, wo der räumliche Abstand versteckt ist. Er entsteht in unserer Konstruktion als Winkel. Zwei Winkel an einem Punkt sind gleich, wenn sie aus den Horizontalen gleiche Abschnitte herausschneiden. Der räumliche Abstand ist ein Winkelmaß.

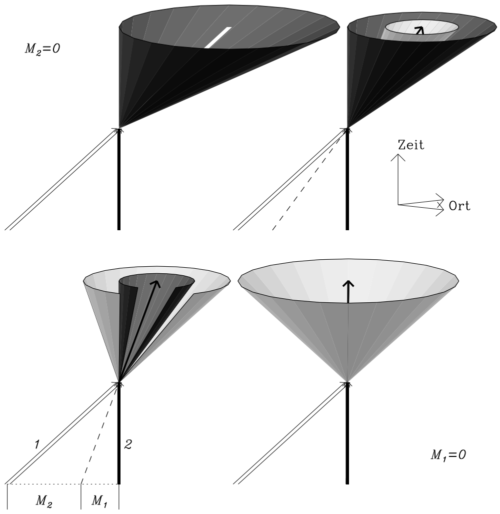

Abbildung 3.9: Elastischer Stoß mit verschiedenen Massenverhältnissen

Wir konstruieren zunächst den Gesamtimpuls und damit die Neigung der Weltlinie des Schwerpunktes. Danach ist der elastische Stoß die physikalische Spiegelung an dieser Weltlinie.

Unten links ist die Situation der beiden vorigen Abbildungen dargestellt.

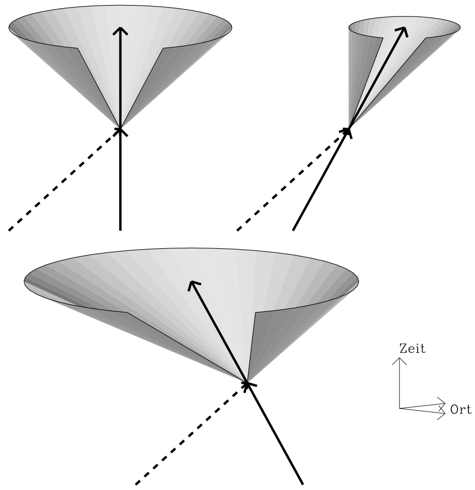

Abbildung 3.10: Elastischer Stoß mit einem sehr schweren Körper

Wir gehen von der letzten Konstruktion der vorigen Abbildung aus und verallgemeinern sie für den Fall, daß die gestoßene Kugel sich selbst auch bewegt. Die physikalische Spiegelung entsteht durch Abtragen der Relativgeschwindigkeit vor dem Stoß in alle Richtungen nach dem Stoß.

Werden die Winkel von verschiedenen Punkten getragen, müssen diese Abschnitte auf die Längen der Schenkel – die ihrerseits ja Zeitintervalle darstellen – bezogen werden: Die Winkel selbst bedeuten also Relativgeschwindigkeiten.

Die Geometrie, die wir konstruiert haben, zeigt zunächst zwei Dinge. Erstens erweist sich, daß die Physik uns tatsächlich auf die Spur der Geometrie der Raum-Zeit führt. Zweitens erweist sich die Geometrie der Raum-Zeit als sehr verschieden von der des Raums allein. Dennoch sind beide strukturell ähnlich, wenn man die Existenz und die Lagerelationen von Punkten, Geraden, Winkeln, Abständen und Parallelen sieht. Wir haben die Geometrie der Raum-Zeit aus der von Galilei und Newton entwickelten Mechanik hergeleitet und nennen sie *Galilei-Geometrie*[7]. Sie erlaubt fast immer den gewünschten, durch die Spiegelung vermittelten Längen- und Winkelvergleich, wobei die horizontal liegende Gerade eine Sonderrolle spielt. Diese ist ihrerseits unmittelbarer Ausdruck der hier *absoluten* Gleichzeitigkeit. Der Abstand zweier Punkte ist immer nur der zeitliche Abstand. Ein Punkt D kann

[7]Galileo hätte sich sicher geweigert, diese Geometrie als die seine zu akzeptieren. Es ist für uns auch nur eine Abkürzung, die an die Herkunft erinnern soll. In der Tat ist es erst eine Konsequenz der Einsteinschen Relativitätstheorie, eine Geometrie von Raum *und* Zeit hinter der Mechanik zu erkennen [2]. Ausführliche Betrachtungen zur Galilei-Geometrie findet man in [62].

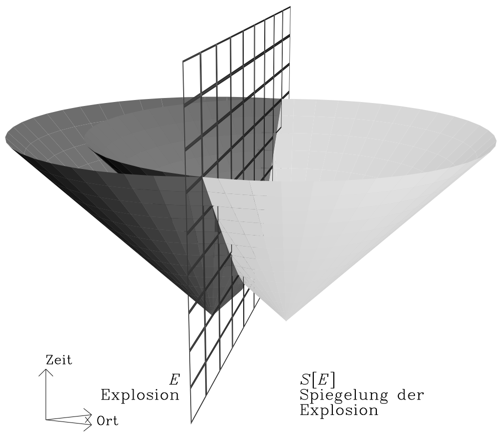

Abbildung 3.11: Spiegelung eines Explosionskegels am festen Spiegel

Die Weltlinien der Bruchstücke der Explosion E bilden im Fahrplan einen Kegel. Die Weltlinien der vom Spiegel reflektierten Bruchstücke liegen auf einem zweiten Kegel, den wir ergänzen können. Wir finden dann ein Ereignis $S[E]$, das wir als physikalisches Spiegelbild von E ansehen müssen.

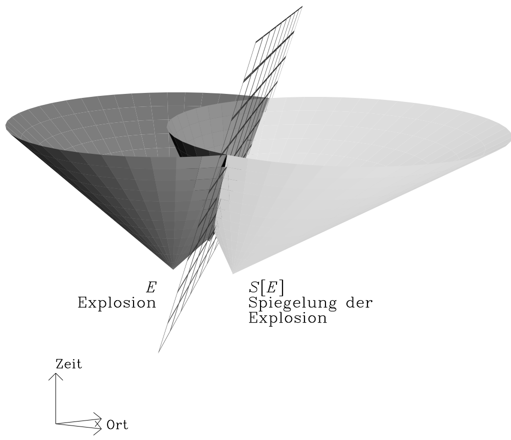

Abbildung 3.12: Spiegelung eines Explosionskegels am bewegten Spiegel

Bewegt sich der Spiegel, dann liegen die Weltlinien der vom Spiegel reflektierten Bruchstücke auf einem *schiefen* Kreiskegel, der wieder ergänzt werden kann und so das Ereignis $S[E]$ bestimmt, das physikalisches Spiegelbild von E am bewegten Spiegel sein muß. Die Gleichzeitigkeit von E und $S[E]$ hängt nicht von der Bewegung des Spiegels ab.

genau dann als Spiegelpunkt $S[C]$ eines anderen Punktes C aufgefaßt werden, wenn C und D gleichzeitig sind. Alle Punkte einer Horizontalen haben so den eigentlichen Abstand Null voneinander (Abb. 3.14). Unabhängig von der Neigung einer Geraden im Fahrplan sind die Lote auf ihr die horizontalen Linien fester Zeit. Eine Ausnahme ist nur die Horizontale selbst: Auf ihr stehen alle anderen Geraden lotrecht. Diese Geometrie ist merkwürdig, aber unzweifelhaft konsistent.

Es ist an dieser Stelle notwendig, darauf hinzuweisen, daß ein Unterschied bleibt zwischen dem aktuellen physikalischen Vorgang der Spiegelung und der geometrischen Spiegelung an einer Geraden im Fahrplan, d.h. in der abstrakten Raum-Zeit. Wir werden die Weltlinie des reellen, durch Wechselwirkung mit dem realen Spiegel reflektierten Teilchens als abstrakte Spiegelung der Weltlinie der virtuell ungestörten Bewegung an der Weltlinie des Spiegels ansehen. Es ist diese Gleichsetzung, die es erlaubt, die Erfahrung der physikalischen Spiegelung zu nutzen, um die abstrakte Spiegelung zu bestimmen, die ihrerseits nur virtuelle Bilder erzeugt (Abb. 3.1).

Die Auffindung der Gesetze der elektromagnetischen Phänomene – des Lichtes eingeschlossen – ändert das Bild ein weiteres Mal. Es zeigt, daß die einfache addi-

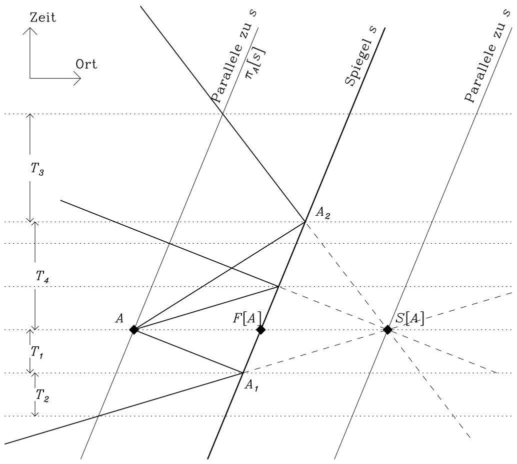

Abbildung 3.13: Spiegelung in der Ort-Zeit-Ebene (Galilei-Geometrie)

Das Ereignis A wird im bewegten Spiegel s betrachtet. Wir ziehen die Parallele $\pi_A[s]$ zu s durch A. Dann wird ein von A ausgehender Körper am Spiegel so zurückgeworfen, daß er die gleiche Zeit für Hin- und Rückweg braucht: $T_1 = t[As] = t[s\pi_A[s]] = T_2$. Verfolgen wir die gespiegelten Weltlinien zurück, so schneiden sie sich alle in einem Weltpunkt, dem Ereignis $S[A]$, das wir als Spiegelpunkt zu A ansehen müssen. Auch ein Körper, der so gespiegelt wird, daß seine Weltlinie durch A geht, träfe ungespiegelt $S[A]$.

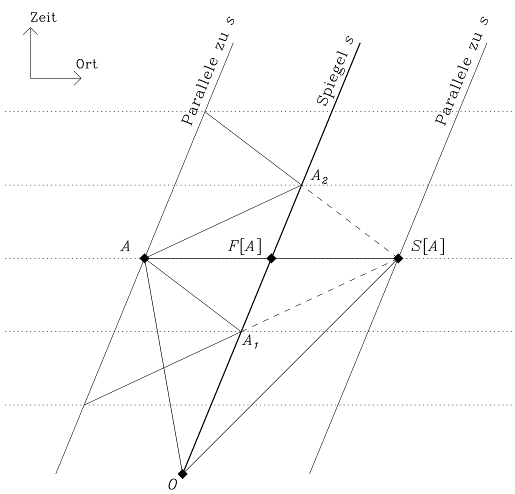

Abbildung 3.14: Länge und Winkel in der Galilei-Geometrie

Spiegelungen sollen generell Längen- und Winkelvergleich bestimmen. Eine Spiegelung soll also Länge und Winkel nicht ändern. Für die Galilei-Geometrie heißt das, daß die Länge einer Strecke durch ihre Zeitkomponente gegeben ist, $d[O, A] = d[O, S[A]]$, und die räumliche Distanz ein Winkelmaß wird, $\angle AOF[A] = \angle S[A]OF[A]$. Gleicher Winkel heißt daher gleiche Relativgeschwindigkeit.

Am Ende können wir die Konstruktion der Spiegelung mit den gleichen Worten wie in Abb. 3.4 beschreiben, wenn wir nur beachten, daß sich der Begriff der Länge geändert hat.

tive Zusammensetzung der Geschwindigkeiten – wie wir sie Huygens entsprechend benutzt haben – für große Geschwindigkeiten nicht gilt, genauer für Geschwindigkeiten, die von ähnlicher Größe wie die Lichtgeschwindigkeit sind[8]. Jedoch werden wir wieder in der Lage sein, eine Geometrie für die Raum-Zeit zu konstruieren. Diesmal werden die Ergebnisse noch überraschender sein.

[8]Wir erinnern daran, daß die Eigenschaft *groß* die Existenz eines Vergleichsmaßstabs voraussetzt. Im Falle der Geschwindigkeiten ist die Lichtgeschwindigkeit der am besten reproduzierbare Maßstab. Hier erhält sie aber ihre Bedeutung durch die im nächsten Kapitel behandelte universelle Isotropie.