Kapitel 6

Die Hyperbel als Kreis

Wir haben uns im vorigen Kapitel mit der von der Wellenausbreitung nahegelegten Spiegelungskonstruktion und dem Lichteck (Abb. 4.8, 5.1) auseinandergesetzt. Diese Konstruktion erlaubt es, ein Gebäude der Geometrie zu errichten, das für die meisten Sätze der euklidischen Geometrie homologe Aussagen enthält. Wenn man die entsprechenden Konstruktionen ausführt, sieht zunächst alles fremd aus. Das liegt aber nur daran, daß man die gewohnte Anschauung von Senkrechtstehen, Winkelgröße und Kreisform ganz aufgeben muß. Erst wenn man diese Begriffe streng auf der neuen Spiegelungskonstruktion aufbaut und den alten Namen die neuen Bedeutungen gibt, erhalten die alten Sätze wieder ihren Sinn. Aus der Sicht der gewohnten Geometrie ist es schon erstaunlich, daß man die alten Aussagen überhaupt wiederfindet. Wie wir in den Kapiteln 8 und 9 sehen werden, hat das jedoch seinen tieferen Grund.

Die Spiegelung bestimmt, was gleiche Winkel und was gleiche Strecken sind. Zunächst überzeugen wir uns, daß der Mittelsenkrechtensatz als notwendige Bedingung für den Längenvergleich erfüllt ist (Abb. 6.1). Die Mittelsenkrechten werden über die Konstruktion der entsprechenden Lichtecke gefunden. Auf dieses Netz von Lichtecken wenden wir den Flächensatz in Parallelogrammen an[1]. Der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten ist definitionsgemäß von den drei Eckpunkten des Dreiecks gleich weit entfernt. Wir *definieren* eben die Länge verschieden ausgerichteter Strecken so, daß gleiche Entfernung herauskommt.

Umgekehrt bestimmt die Notwendigkeit des Mittelsenkrechtensatzes die Geometrie auch dann, wenn wir kein Licht zur Definition der Spiegelung zur Verfügung haben (Abb. 6.2). Wenn wir die Gleichzeitigkeit (die Lote) bezüglich zweier Weltlinien kennen, können wir sie für alle konstruieren. Wir finden dann auch (wenn die

[1]Haben wir die Diagonale eines Parallelogramms und einen Punkt auf ihr gewählt, zeichnen wir durch ihn die Parallelen zu den Seiten. *Die zwei Teilparallelogramme, die nicht von der Diagonale geschnitten werden, haben gleichen Flächeninhalt.* Andererseits kann jeder Punkt im Parallelogramm benutzt werden, dieses in vier Teilparallelogramme zu zerlegen. Die eventuelle Gleichheit der Inhalte zweier gegenüberliegender Flächen zeigt dann an, daß der Punkt auf der entsprechenden Diagonalen des Parallelogramms liegt.

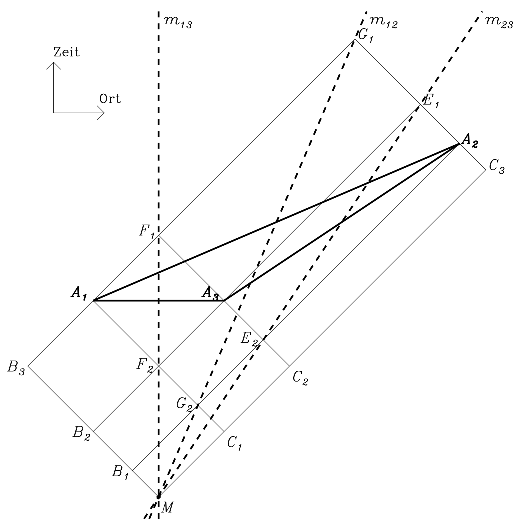

Abbildung 6.1: Der Mittelsenkrechtensatz in der Minkowski-Geometrie

Wir konstruieren die Mittelsenkrechten über jeder einzelnen Seite mit Hilfe der Lichtecke. Wir benutzen die Flächengleichheit der Ergänzungsrechtecke für Punkte auf den Diagonalen. Die Mittelsenkrechten auf AC und BC schneiden sich in M und fixieren $AF_1G_1E_1 = CF_1C_2G_2$ und $BF_2G_2E_2 = CF_2C_1G_1$. Daraus folgt $AC_3C_1E_1 = BC_3C_2E_2$. Damit ist aber die Bedingung erfüllt, daß die Mittelsenkrechte C_4C_3 auf AB auch durch M geht. Das wollten wir zeigen.

Ein allgemeinerer Beweis wird in Abb. A.5 vorgestellt.

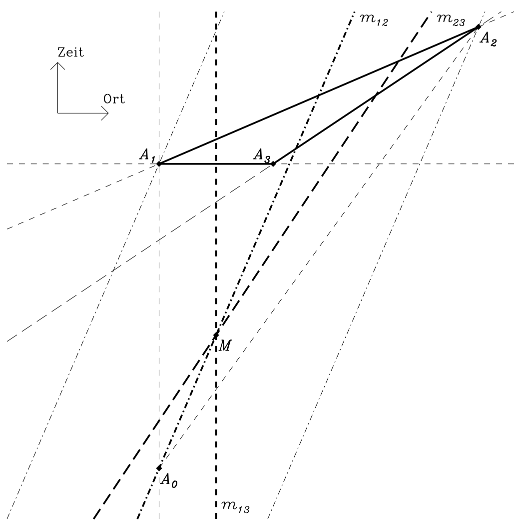

Abbildung 6.2: Gleichzeitigkeit und Relativität

Die ist ein vergrößerter Ausschnitt von Abb. 4.7. Dort haben wir für *eine* Geschwindigkeit des Bezugssystems die Gleichzeitigkeit bestimmt. Die Gleichzeitigkeit – und die Geschwindigkeitsabhängigkeit der Masse – ist damit für *alle* Geschwindigkeiten bestimmt, wenn wir die Schlußweise des Mittelsenkrechtensatzes übernehmen. M ist das Ereignis, für das sowohl A_1 und A_3 als auch A_1 und A_2 gleichwertig sind: In beiden Fällen gibt es einen Bezug, in welchem die Differenzen der Orts- und Zeitkoordinaten den gleichen Betrag haben (m_{13} bzw. m_{12}). Wenn in dieser Weise also auch A_2 und A_3 gleichwertig sind, müssen sie in Bezug auf die Weltlinie m_{23} gleichzeitig sein.

Masse mit der Geschwindigkeit zunimmt), daß es Linien der Länge Null gibt und man diese wie gehabt konstruieren kann[2].

Sehen wir uns nun die Spiegelung an einem Geradenbüschel an, das von einem Punkt M der Zeichenebene getragen wird. Mit dem spiegelungsdefinierten Abstand sind der Punkt Q und alle seine Spiegelbilder gleich weit von M entfernt, sie bilden einen *Kreis*. In der euklidischen Geometrie erwarten wir einen gewöhnlichen Kreis (Abb. 3.2). Abbildung 6.3 zeigt das mit der entsprechenden Genauigkeit. Genauer:

[2]Fänden wir bei Bewegung eine geringere Masse, wäre die euklidische Geometrie auch für die Raum-Zeit zutreffend. Aber welche Koordinate wäre dann überhaupt Zeit? Invariante Wellenausbreitung wäre überhaupt nicht möglich.

was ein Kreis ist, wird durch diese Konstruktion überhaupt erst bestimmt. Haben wir eine bestimmte Art der Spiegelung gewählt, dann erhalten wir mit unserer Konstruktion die Kurve, die wie der Kreis als geometrischer Ort der Punkte bestimmt ist, die von M einen festen Abstand haben. In der euklidischen Geometrie zeigt sich der Kreis als spezielle Ellipse, genauer als Ellipse mit gleichen Achsen. Solche Gleichheit ist allein in einer *metrischen* Geometrie bestimmbar. Die Kurve der *neuen* Geometrie ergibt sich aus der *neuen* Art der Spiegelung. Mit Hilfe der Lichtecke finden wir eine Hyperbel (Abb. 5.1, 6.4). Der Name Hyperbel bezeichnet einen Kegelschnitt, der in zwei Richtungen ins Unendliche läuft. Im Gebäude der pseudoeuklidischen Geometrie, das wir jetzt bauen wollen, ist er der gesuchte Kreis. Die *Hyperbel* ist jetzt der geometrische Ort der Punkte, die gleich weit von einem festen Zentrum entfernt sind. Nur ist der Abstand nach der neuen Pythagoras-Figur zu berechnen, die wir im vorigen Kapitel dargestellt haben (Abb. 5.2). Der Minkowski-Kreis ist nicht mehr eine spezielle Ellipse, sondern eine spezielle Hyperbel, deren Asymptoten zwei fest gegebene Richtungen haben.

Die Umgangssprache setzt Kreis, Ellipse, Parabel und Hyperbel auf eine Stufe. Das erzeugt den falschen Eindruck, das sie alle in gleicher Weise spezielle Kegelschnitte sind. Hier gehört aber der Kreis *nicht* dazu. In unserem Zusammenhang sind Ellipse, Parabel und Hyperbel eine Generation, nämlich Kegelschnitte, die das Unendliche meiden, berühren oder schneiden. Längen (auf Geraden verschiedener Lage) müssen dazu nicht vergleichbar sein. Der Kreis gehört zu einer anderen Generation: er bedarf der Meßbarkeit solcher Vergleichbarkeit von Längen. Der Kreis ist in unserem Zusammenhang immer ein Kegelschnitt: in der euklidischen Geometrie eine spezielle Ellipse, in der pseudoeuklidischen eine spezielle Hyperbel. Sie unterscheiden sich auf Grund der verschiedenen metrischen Eigenschaften.

Wie der euklidische Kreis ist auch der pseudoeuklidische durch die Angabe dreier Punkte bestimmt. Die Konstruktion des Schnittpunkts der drei Mittelsenkrechten liefert uns gerade das Zentrum, und die Spiegelungen an den drei Mittelsenkrechten sagen uns, daß die drei Eckpunkte auf einem pseudoeuklidischen Kreis liegen. Mit anderen Spiegelungen erhalten wir weitere Punkte dieser Kurve. Etwas ist merkwürdig: Alle pseudoeuklidischen Kreise haben gemeinsame Asymptotenrichtungen, nämlich die beiden lichtartigen Richtungen. In der projektiven Deutung, die wir im Kapitel 8 erläutern, sind diese Richtungen zwei Punkte auf der Ferngeraden. Durch diese beiden Punkte geht jeder pseudoeuklidische Kreis.

Die bekannten Schnittpunktsätze für das Dreieck gelten nun auch in der pseudoeuklidischen Geometrie [5, 117]. Wir finden einen Schnittpunkt der drei Höhen, mehr noch, die Mittelsenkrechten eines Dreiecks sind die Höhen des Dreiecks, das wir aus den Seitenmitten bilden können. Diesen Zusammenhang zwischen Mittelsenkrechten und Höhen verdanken wir hier der Tatsache, daß auch in der pseudoeuklidischen Geometrie das Parallelenaxiom gilt und wir mit der Gleichheit von Stufen- und Wechselwinkeln argumentieren können. Das können wir in einer allgemeineren Geometrie nicht mehr, zwei Geraden können dann nur noch *ein* gemeinsames Lot haben. Das reicht aber aus, um die Übereinstimmung zwischen dem Schnitt-

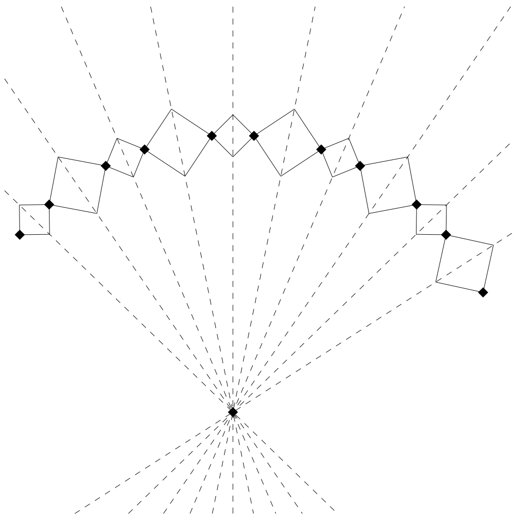

Abbildung 6.3: Der Kreis als Ergebnis konsekutiver Spiegelung

Wir spiegeln einen Punkt sukzessive an den Strahlen eines Büschels. Spiegelbildlich gelegene Punkte erscheinen als Ecken eines Rhombus, dessen eine Diagonale mit der spiegelnden Geraden zusammenfällt. Alle Spiegelpunkte liegen auf einer speziellen Ellipse, die den Kreis der euklidischen Geometrie definiert (Abb. 3.2). Die Konstruktion erfordert, daß das Produkt von drei Spiegelungen an Geraden des Büschels wieder eine Geradenspiegelung ist. Diese Produkteigenschaft ist der Kern des Mittelsenkrechtensatzes.

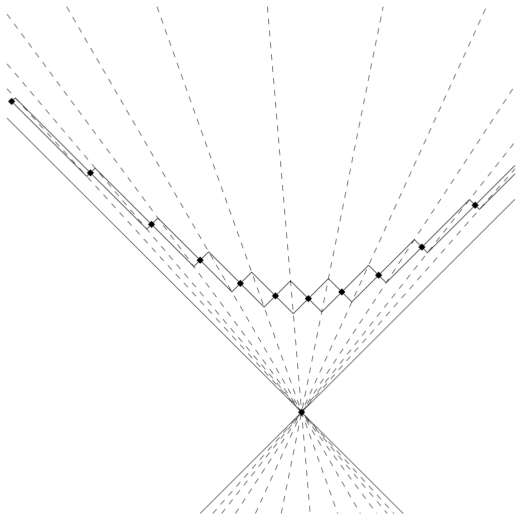

Abbildung 6.4: Hyperbel statt Kreis

Wir konstruieren homolog zu Abbildung 6.3 sukzessive Spiegelungen mit der pseudoeuklidischen Vorschrift und gewinnen eine Kurve, die der Anschauung nach eine Hyperbel, der Funktion nach ein (pseudoeuklidischer) Kreis ist. Spiegelbildlich zueinander gelegene Punkte bestimmen ein Lichteck, dessen eine Diagonale mit der spiegelnden Geraden zusammenfällt. Die Lichtecke sind – nach pseudoeuklidischer Beurteilung – Rhomben mit der Kantenlänge Null.

punkt der Mittelsenkrechten und dem Höhenschnittpunkt im Seitenmittendreieck zu erhalten (Anhang A Seite 171). Dual zu dieser Feststellung ist der Satz, daß der Höhenschnittpunkt seinerseits der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden im Dreieck seiner Fußpunkte ist (Abb. 6.5).

Der Höhensatz hat einfache physikalische Interpretationen [138]. Besteht das fragliche Dreieck aus zeitartigen Seiten, dann repräsentieren die Seiten a, b und c drei Beobachter $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$. Diese treffen sich jeweils zu den Ereignissen ab, bc und ca. Dann gibt es genau ein Ereignis E, das für $\mathcal{A}$ gleichzeitig mit bc, für $\mathcal{B}$ gleichzeitig mit ca und für $\mathcal{C}$ gleichzeitig mit ab ist. Sind die Seiten des Dreiecks raumartig, kommen wir zu einer anderen Formulierung: Wenn drei unbeschleunigte Beobachter $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$ (deren Weltlinien jetzt die drei Höhen sind) sich in einem Ereignis (H) treffen und jeder auf seiner Weltlinie ein weiteres Ereignis A, B und C markiert, dann gilt: Sind B und C für $\mathcal{A}$ gleichzeitig und sind A und C für $\mathcal{B}$

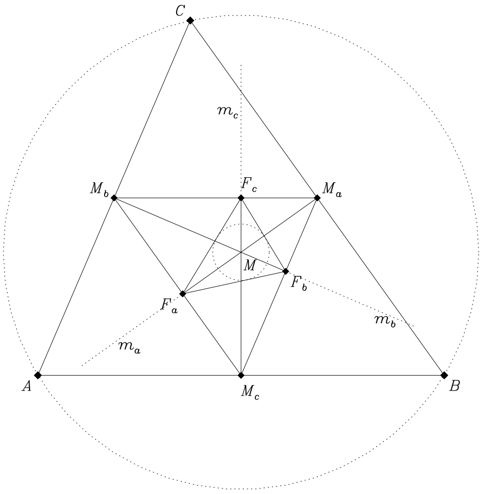

Abbildung 6.5: Seitenmittendreieck und Fußpunktdreieck

In jedem Dreieck ΔABC schneiden sich die Mittelsenkrechten m_a, m_b, m_c der Seiten in einem Punkt M. Die Mittelsenkrechten sind ihrerseits die Höhen in dem Dreieck, das von den Seitenmitten M_a, M_b, M_c gebildet wird. Deren Fußpunkte F_a, F_b, F_c im Seitenmittendreieck bilden ihrerseits ein Dreieck, dessen Winkelhalbierenden wieder m_a, m_b, m_c sind.

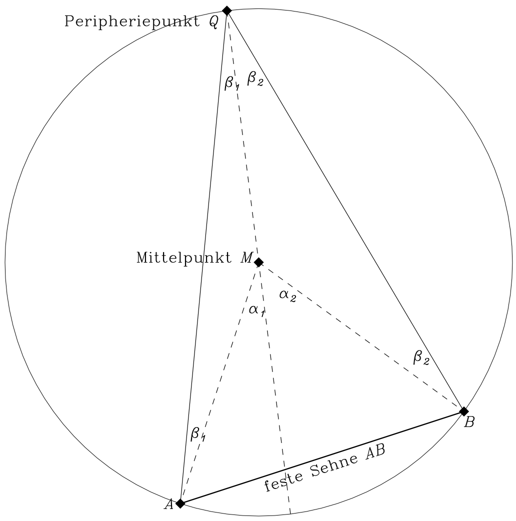

Abbildung 6.6: Der Peripheriewinkelsatz in der euklidischen Geometrie

Wir zeichnen einen Kreis um M und eine seiner Sehnen AB. Dann wählen wir einen Punkt Q auf der Peripherie. Der Peripheriewinkel $\beta_1 + \beta_2$ ist gleich der Hälfte des Winkels $\alpha_1 + \alpha_2$ am Mittelpunkt ($\alpha_1 = 2\beta_1$, $\alpha_2 = 2\beta_2$ und $\alpha_1 + \alpha_2 = 2(\beta_1 + \beta_2)$) und somit unabhängig von der Lage des Punktes Q auf der Peripherie.

gleichzeitig, dann sind auch A und B für $\mathcal{C}$ gleichzeitig.

Die Dreieckspunkte und der Höhenschnittpunkt bilden ein Viereck, in dem die Rollen getauscht werden können und jeder Punkt Höhenschnittpunkt im Dreieck der drei anderen ist. Schließlich steht im vollständigen Viereck $ABCH$ jede Seite senkrecht auf der gegenüberliegenden[3]. Kennen wir die Lote auf zwei Geraden g_1 und g_2, dann haben wir auch die Lote von ihrem Schnittpunkt auf alle anderen Geraden der Ebene. Definieren wir die Lote auf drei verschiedenen Geraden, erhalten wir die gesamte Geometrie, und der Höhensatz ist dabei die einzige Beschränkung unserer Freiheit (Anhang D, Abb. D.1).

Ein besonderer Fall ist auch der Peripheriewinkelsatz. Wir führen hier zum Vergleich seine euklidische Form (Abb. 6.6), seine pseudoeuklidische Form (Abb. 6.7) und seine Galileische Form (Abb. 6.8) an. In der euklidischen Geometrie kann ein Kreis über zwei verschiedene Eigenschaften definiert werden. Zum einen hat ein Kreis einen Punkt im Innern, von dem aus alle Punkte des Kreises gleichen Abstand

[3]In der Galileischen Geometrie ist der Höhensatz trivial: Alle Höhen sind Linien t =const, also Parallelen, der Höhenschnittpunkt liegt im Unendlichen. Es gibt i.a. kein Ereignis, das zu drei anderen Ereignissen einzeln als gleichzeitig oder am selben Ort aufgefaßt werden kann.

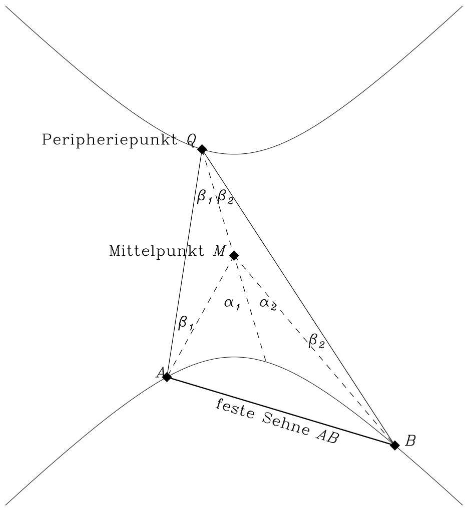

Abbildung 6.7: Der Peripheriewinkelsatz in der Minkowski-Geometrie

Für die pseudoeuklidische Geometrie geht der Beweis wie in Abbildung 6.6, wenn man weiß, daß gleichschenklige Dreiecke gleichwinklig sind (da argumentieren wir mit einer Spiegelung). Wir benutzen im wesentlichen den Stufenwinkelsatz wie in der euklidischen Geometrie auch.

Der Stufenwinkelsatz ist dem Parallelenaxiom äquivalent. Wir können deshalb nicht erwarten, den Peripheriewinkelsatz auch in einer nichteuklidischen Geometrie zu finden.

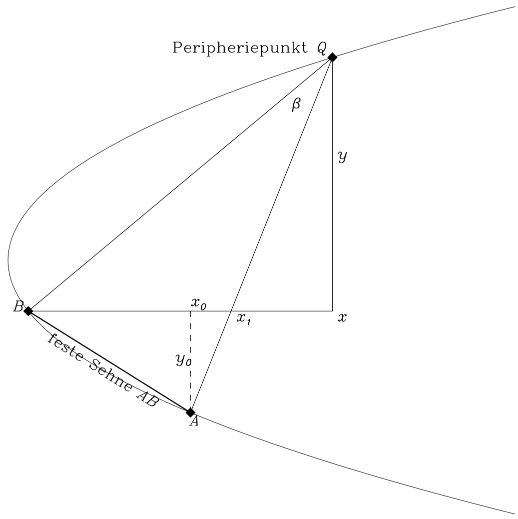

Abbildung 6.8: Der Peripheriewinkelsatz in der Galilei-Geometrie

In der Galilei-Geometrie zeigt der Peripheriewinkelsatz zum ersten Male eine vom Kreis verschiedene Kurve. Was wir ganz allgemein finden, ist in Abb. 9.13 beschrieben. (A, B) sei die gegebene Sehne. Die Forderung festen Peripheriewinkels ist $x_1/y = \beta$ konstant, die Ähnlichkeit liefert $(x - x_1)/y = (x_1 - x_0)/y_0$. Lösen wir beide Gleichungen nach x_1 auf, um x_1 zu eliminieren, ergibt sich die quadratische Gleichung

$$x = (\beta y^2 + \beta y y_0 - y x_0)/y_0.$$

Die zugehörige Kurve ist eine Parabel mit Achse in x-Richtung.

haben. Nehmen wir drei Punkte auf der Peripherie, finden wir den Mittelpunkt als Schnittpunkt der drei Mittelsenkrechten. Zum anderen sieht man eine gegebene Sehne von jedem Punkt der Peripherie aus unter dem gleichen Winkel (Abb. 6.6). Beide Eigenschaften definieren in der euklidischen Geometrie den Kreis. Dies gilt nun auch noch in der Minkowski-Geometrie (Abb. 6.7). Aber bereits in der Galilei-Geometrie fallen beide Eigenschaften auseinander. Der Kreis erster Art (definiert als geometrischer Ort festen Abstands) entartet in zwei Horizontalen, die gleichen Abstand vom Mittelpunkt haben. Der Mittelpunkt ist nicht mehr eindeutig, sondern kann überall auf der Horizontalen in der Mitte der beiden anderen liegen. Der Kreis zweiter Art ist dagegen eine Parabel (Abb. 6.8). Immerhin ist der Kreis zweiter Art noch eine Kurve zweiter Ordnung. In den sechs anderen Geometrien, die das Parallelenaxiom nicht mehr erfüllen, sind die Kreise zweiter Art Kurven vierter Ordnung (Abb. 9.13).

Wir betrachten zum Schluß dieses Kapitels den Feuerbach-Kreis. In der euklidi-

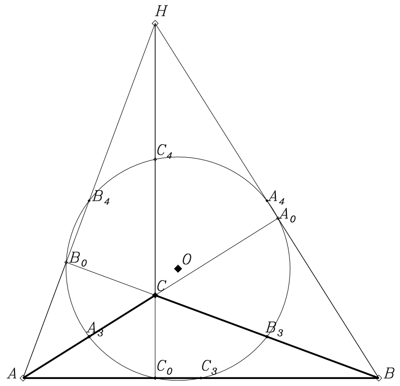

Abbildung 6.9: Der Feuerbach-Kreis in der euklidischen Geometrie

Ziehen wir einen Kreis durch die drei Höhenfußpunkte A_0, B_0, C_0, dann schneidet der Kreis das Dreieck auch in den Seitenmitten Seitenmitten A_3, B_3, C_3 und die Höhen in den Höhenmitten A_4, B_4, C_4. Zu drei der vier Punkte A, B, C, H ist jeweils der vierte der Höhenschnittpunkt des Dreiecks, und die Eigenschaften, Seitenmitte oder Höhenmitte zu sein, vermischen sich.

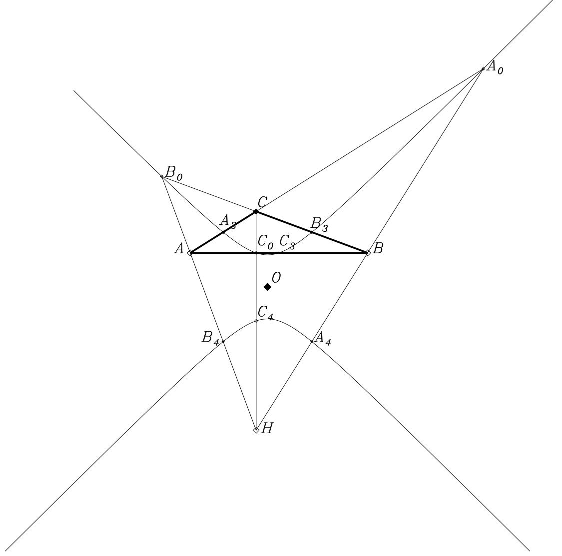

Abbildung 6.10: Der Feuerbach-Kreis in der Minkowski-Geometrie

Die Höhenfußpunkte A_0, B_0, C_0 müssen im Fall der Minkowski-Geometrie natürlich nach den entsprechenden Regeln konstruiert werden. Der Minkowski-Kreis durch die Höhenfußpunkte – eine gleichseitige Hyperbel mit den gegebenen Asymptoten, geht nun wieder durch die Seitenmitten A_3, B_3, C_3 und die Höhenmitten A_4, B_4, C_4, alles homolog zum euklidischen Fall. Abb. 8.12 zeigt die projektive Verallgemeinerung.

schen Geometrie können wir zeigen, daß der Kreis durch die drei Höhenfußpunkte auch durch die drei Seitenmitten und die drei Höhenmitten[4] geht (Abb. 6.9). Definieren wir die Höhen und den Kreis auf die pseudoeuklidische Art, bleibt der Satz immer noch unverändert (Abb. 6.10). Wir könnten nun mit all den Sätzen der Trigonometrie fortfahren, die sich nur auf das Parallelenaxiom und die Existenz von Kreisen stützen, nicht aber die Dreiecksungleichung heranziehen. Die Dreiecksungleichung ist der Punkt, der den Unterschied ausmacht. Bis auf diesen sind euklidische und pseudoeuklidische Geometrie strukturell homolog. Für die späteren Untersuchungen schreiben wir die Dreiecksungleichung in eine Existenzforderung um. Analog zum Parallelenaxiom betrachten wir eine Gerade g und einen Punkt P neben ihr (der nicht auf ihr liegt). In der euklidischen wie in der Galilei- und Minkowski-Geometrie gibt es durch P genau eine Gerade, die g nicht schneidet. Das ist das Parallelenaxiom. Die Dreiecksungleichung ist die duale Aussage. Sie betrifft nicht die Geraden durch P, sondern die Punkte auf g. In der euklidischen Geometrie hat *kein* Punkt

[4] Die Mitte einer Höhe halbiert die Strecke zwischen der Ecke und dem Höhenschnittpunkt.

auf g von P den Abstand Null. In der Galilei-Geometrie haben wir gelernt, daß es auf g *genau einen* Punkt gibt, der von P den Abstand Null hat. Es ist dies das zu P gleichzeitige Ereignis auf g. In der Minkowski-Geometrie nun hat *mehr als nur ein* Punkt auf der (zeitartigen) Weltlinie g den Abstand Null von P. Wir haben diese Punkte bei der Zeichnung des Lichtecks in den Abbildungen 4.8 und 5.1 benutzt.