

Kapitel 7

Krümmung

7.1 Kugel und Massenschale

Wenn schon Kreis und Hyperbel so verwandte Geometriegebäude bestimmen, wie ist es dann mit Kugel und Hyperboloid? Von der Kugelgeometrie wissen wir sehr viel, schließlich ist die Oberfläche der Erde bis auf einige Promille genau eine Kugel. Die Navigation auf See und in der Luft muß mit der Kugelgeometrie rechnen. Wir wissen, daß gerade Linien (genauer kürzeste Linien, Geodäten) Bögen von *Großkreisen* sind, deren räumliches Zentrum der Mittelpunkt der Kugel ist. Im Gradnetz der Erdkarten sind die Meridiane und der Äquator solche Großkreise. Die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten auf der Kugeloberfläche ist ein Großkreisbogen. Nun schneiden sich alle Großkreise durch einen Punkt auf der Kugel wieder im Gegenpol. Das gewohnte Beispiel dafür sind die Meridiane durch den Nordpol, die sich alle im Südpol wieder schneiden. Dies ist der Grund, weshalb zwei gerade Linien auf der Kugeloberfläche immer zwei Schnittpunkte haben, es also keine Parallelen gibt. Damit gilt in der Kugelgeometrie das Parallelenaxiom nicht. Alle Sätze, deren Beweis sich auf das Parallelenaxiom stützen muß, können nicht mehr unverändert gelten. Speziell haben alle Dreiecke eine Winkelsumme größer als der gestreckte Winkel, wobei der Exzeß der Winkelsumme proportional der Dreiecksfläche ist (Abb. 7.1). Das wirkt sich auch darin aus, daß bei gegebenem Umfang die Fläche eines Kreises größer ist, als nach der von der euklidischen Geometrie geprägten Erfahrung erwartet wird (Abb. 7.2). Umfang und Fläche hängen vom Radius ϱ ab, und wir erhalten

$$U[\varrho] < \sqrt{4\pi F[\varrho]} < 2\pi\varrho, \quad \text{falls } \varrho > 0. \quad (7.1)$$

Wir sprechen generell von positiver Krümmung an einem Punkt, wenn dies in seiner Umgebung beobachtet wird. Danach ist die Kugeloberfläche homogen und positiv gekrümmt. Befinden wir uns auf einer anderen Fläche, wo wir feststellen, daß der Exzess der Winkelsumme kleiner als Null ist oder die Fläche eines Kreises gegebenen Umfangs kleiner ist als nach der euklidischen Formel erwartet, sprechen wir von negativer Krümmung. Auf einer allgemeinen Fläche wird die Krümmung variie-

ren, und die eben erläuterten Exzeßregeln werden nur in kleineren Umgebungen der untersuchten Punkte gelten.

Diese Effekte verallgemeinernd bewirkt eine Krümmung eine charakteristische Drehung von Richtungen, die auf einem geschlossenen Weg mit Eifer festgehalten werden. Wie kann man solch einen *Paralleltransport*¹ definieren? Nehmen wir an, wir steuern ein Schiff auf möglichst gerader Linie zu einer bestimmten Position. Ist diese durch einen Leuchtturm markiert, haben wir leichtes Spiel: Wir folgen der Sichtlinie. Die natürliche Definition der Parallelität stützt sich dann darauf, daß die Richtungen zum Leuchtturm an jedem Punkt des Weges parallel sind. Unser Weg ist eine autoparallele Kurve. Steht der Leuchtturm abseits von der Zielposition, könnten wir immer noch versuchen, die Wegrichtung in festem Winkel zur Sichtlinie des Leuchtturms zu halten und den Weg wieder als autoparallele Kurve zu erklären. Das endet aber in einer logarithmischen Spirale, in einer *Loxodromen*, keineswegs etwa in einer kürzesten Linie. Die Situation ändert sich nur graduell, wenn an Stelle des Leuchtturms etwa ein magnetischer Pol benutzt wird. Der Weg bleibt eine Loxodrome (Abb. 7.3). Wollen wir die *Geodäten* als autoparallele Kurven finden, können wir folglich so nicht vorgehen. Wir müssen die Parallelverschiebung direkt an die Geodäte binden. Zwei Richtungen an verschiedenen Punkten einer Geodäte sollen als parallel angesehen werden, wenn sie mit der Tangente den gleichen Winkel bilden. Transportieren wir längs einer allgemeinen Kurve, zerlegen wir diese einfach in einen Polygonzug, wie dies etwa bei der Berechnung der Bogenlänge ohnehin geschieht. Auf diese Weise ist der geodätische Paralleltransport eindeutig bestimmt. Wir veranschaulichen ihn auf der Kugel (Abb. 7.1). Wir betrachten einen Transport von P über A , C und B zurück nach P . Schauen wir beim Startpunkt P nach Südost, hat die Blickrichtung von der Wegrichtung eine Abweichung von $\pi/4$ nach rechts. Diesen Winkel halten wir fest, bis wir bei A gelandet sind. Dort wenden wir uns nach Norden. Unsere Blickrichtung muß also nun zur Wegrichtung ein Abweichung von $3\pi/4$ nach rechts festhalten. Bei C wenden wir uns wieder in rechtem Winkel nach links und halten nun eine Abweichung von $3\pi/4$ nach links fest. Schließlich wenden wir uns bei B ein drittes Mal nach links, um wieder den Startpunkt zu erreichen. Nun liegt unsere Richtung um $\pi/4$ links ab. Sind wir bei P wieder angekommen, müssen wir feststellen, daß sich unsere Blickrichtung um $\pi/2$ nach links gedreht hat, obwohl wir sie nach bestem Wissen festgehalten haben. Diese Drehung der Tangentialebene ist eine allgemeine Eigenschaft des Paralleltransports um geschlossene Kurven. Der Drehungsgrad erweist sich als proportional zur Krümmung und zur umfahrenen Fläche.

Die Tatsache, daß wir eigentlich verschiedene physikalische Prozeduren als Paralleltransport festlegen können, bedeutet mathematisch, daß Paralleltransport und Metrisierung zunächst voneinander unabhängig sind. Es ist ein zweiter Schritt, den Paralleltransport nach der Metrik zu richten, damit Geodäten autoparallele Kurven

¹Hier wird das Wort *parallel* nicht in dem globalen Sinne benutzt, wie er im Parallelenaxiom benutzt wird. Vielmehr wird er nur auf die Bedeutung beschränkt, die in der Gleichheit von Stufen- und Wechselwinkeln liegt, die Parallelen in der euklidischen Geometrie zeigen.

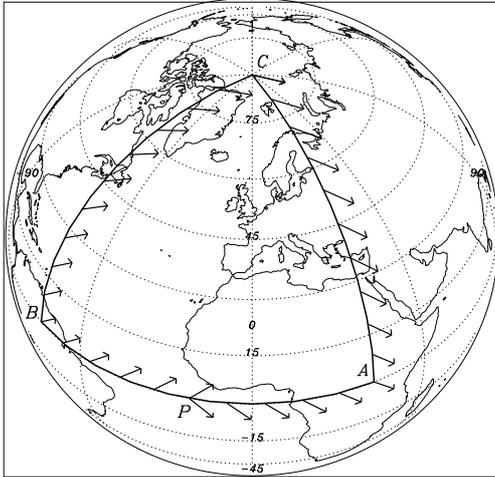


Abbildung 7.1: Dreieck auf der Kugel mit Exzeß und Rotation der Tangenten.

Am Punkt P wählen wir eine beliebige Richtung (hier nach SO). Längs der Geodäten bis Punkt A , von A nach C , von C nach B und von B zurück zu P halten wir die Richtung relativ zur Bewegungsrichtung fest. Nur in den Punkten A , C und B berücksichtigen wir, daß der Weg einen Knick um $\pi/2$ nach links macht und wir zur Abweichung nach rechts jeweils diesen Winkel zulegen müssen, wenn wir die Eckpunkte passieren. Sind wir bei P wieder angelangt, haben wir zur Abweichung nach rechts $3\pi/2$ addiert, insgesamt beobachten wir also eine Drehung der Tangentialebene um $\pi/2$ nach links. Die Winkelsumme des umfahrenen Dreiecks überschreitet den euklidischen Wert (π) gerade um diese $\pi/2$.

werden. In einem axiomatischen Zugang ist die Krümmung (d.h. die Drehung der Tangentialebenen bei Paralleltransport um eine geschlossene Kurve) Eigenschaft des Paralleltransports und nicht der Metrik unmittelbar². Denken wir an den Paralleltransport mit der Magnetnadel, so ist dessen Krümmung Null. Die Art der Längenbestimmung ist für ihn unerheblich. Die Tangentialebene dreht sich insgesamt nicht, wenn der Weg den Pol nicht einschließt. Bei Einschluß des Pols ist die Drehung 2π .

²Geodäten und autoparallele Kurven sind also im allgemeinen verschieden. Diese Feinheiten bilden den Hintergrund der unitären Theorien wie sie z.B. von A.Einstein, H.Weyl und E.Schrödinger gesucht wurden.

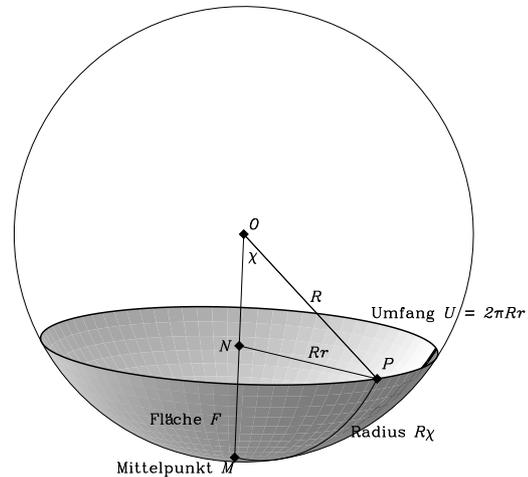


Abbildung 7.2: Fläche und Umfang auf der Kugel

Ein Kreis auf der Kugeloberfläche ist der Rand einer Kalotte. Sein Radius um den Mittelpunkt M ist ein Bogen $\rho = R\chi$ auf der Kugeloberfläche. Die Projektion Rr dieses Radius auf die Schnittebene ist kürzer ($NP < MP$), folglich ist der Umfang $U = 2\pi Rr$ kleiner als der euklidisch erwartete Wert $2\pi R\chi$. Die Fläche der Kugelkalotte ist proportional der Höhe, $F = 2\pi Rh = 2\pi R^2(1 - \cos \chi)$ und daher ebenfalls kleiner als der euklidisch erwartete Wert $\pi R^2 \chi^2$. Verglichen mit dem Umfang, ist die Fläche größer als der euklidisch erwartete Wert.

$$U^2 < 4\pi F < 4\pi^2 \rho^2$$

für $\rho > 0$.

Die Loxodromen sind Kurven fester Neigung gegen eine vorgegebene Linienkongruenz, in unserer Abbildung gegen die Meridiane einer Kugel. Sie kann durch die Magnetnadel gesteuert werden. Hier hat die Loxodrome eine feste Abweichung vom Meridian von ungefähr $\delta = 0.35\pi$ und nähert sich dem Pol wie eine logarithmische Spirale, ohne ihn je zu erreichen (die logarithmischen Spiralen sind die Loxodromen der Ebene). In Kugelkoordinaten (geographische Länge λ , geographische Breite ϕ) ist die Gleichung der Loxodromen $\cos \phi \, d\lambda = \tan \delta \, d\phi$. Für $\delta = 0.5\pi$ ergeben sich die Breitenkreise.

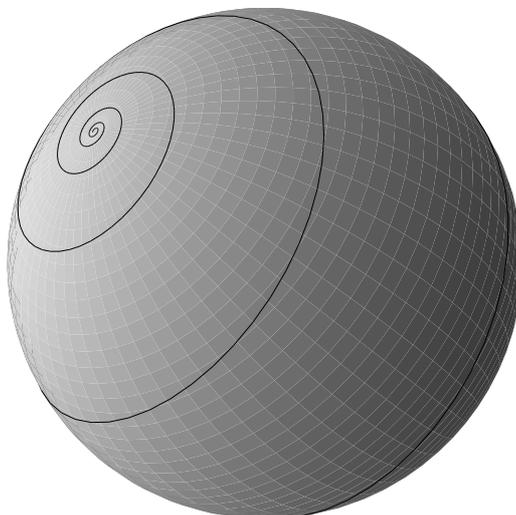


Abbildung 7.3: Eine Loxodrome

Es war eine wichtige Entdeckung, daß die Krümmung eine innere Eigenschaft der Flächen und Räume ist. Gewöhnlich versucht man, sich die gekrümmte Fläche eingebettet in den dreidimensionalen Raum vorzustellen und die Krümmung dann als Änderung in der Richtung des Normalenvektors zu sehen³. Trotz dieses anschaulichen Bildes erscheinen weder Einbettung noch Normalenvektor in der Definition der Geodäten, des Paralleltransports und der daraus abgeleiteten Krümmung. Alle diese Begriffe enthalten nur innere Eigenschaften der Fläche und hängen nicht von einer möglichen Einbettung ab. Das ist von außergewöhnlicher Bedeutung, weil man so auch dreidimensionale Räume und vierdimensionale Welten als gekrümmt ansehen kann. Zusätzliche Einbettung in höherdimensionale Räume ist dabei *physikalisch nicht notwendig*, obwohl natürlich gefragt werden darf, welche gekrümmten Räume und Welten sich in euklidische oder pseudo-euklidische höherdimensionale Räume einbetten lassen.

Es gibt einen Mechanismus, der den praktizierten Paralleltransport der Blickrichtung verwirklicht. Dies ist der *Südzeigewagen* (Zhǐ nán chē) [112, 89], den man gelegentlich bei Ausstellungen antiker chinesischer Technik besichtigen kann (Abb. 7.4). Über ein subtrahierendes Differentialgetriebe wird die zentrale senkrechte Achse so geführt, daß die Richtung des Zeigers fest bleibt, auch wenn unter ihm der zweirädrige Wagen gedreht wird (Abb. 7.5). Die oben begründete Drehung der Blickrichtung wird vom Zeiger nachvollzogen, wenn der Wagen längs der Linie *PACBP* gezogen wird. – Wir haben schon festgestellt, daß die Magnetnadel eine solche parallelverschobene Richtung *nicht* verwirklicht. Vielmehr hält sie die Richtung auf den Pol unabhängig von dem Großkreis, auf dem wir uns bewegen sollen. Die Kurven konstanter Inklination gegen diese Richtung sind Loxodromen, keine Geodäten. Wir

³Die erste Bestimmung des Erdradius durch benutzte diese Vorstellung.

sehen den Unterschied daran, daß sich der Inklinationswinkel auf einer Geodäten im allgemeinen ständig ändert.

Geodäten sind intuitiv als kürzeste Verbindungen definiert. Genau genommen sind sie jedoch nur *extremale* Verbindungen. Je nach den lokalen metrischen Eigenschaften (euklidisch oder pseudoeuklidisch) sind sie kürzeste oder längste Verbindungen. In unserem Beispiel, der Kugelfläche im euklidischen Raum, sind sie kürzeste Verbindungen, d.h., ein Weg kann durch den Einbau kleiner Umwege nur verlängert werden. Deshalb müssen extremale Wege kürzeste Wege sein. Dies hängt also unmittelbar mit der Dreiecksungleichung zusammen. In einer Minkowski-Welt sind zeitartige Geodäten jedoch längste Verbindungen. Das haben wir schon bei der Besprechung des Zwillingsparadoxons gesehen. – Bei geodätischem Paralleltransport sind Geodäten auch autoparallele Kurven. Darüberhinaus sind sie in diesem Falle auch die einzigen autoparallelen Kurven. Das sehen wir wieder am Südzeigewagen. Orientieren wir uns immer an der Richtung des Südzeigers, fahren wir also auf einer Autoparallelen, muß der Weg beider Räder gleich sein. Eine Kurve die durch seitliche Verschiebung verkürzt werden könnte, würde sich gerade dadurch verraten, daß die Wege zu beiden Seiten des Wagens verschieden lang sind.

Wir fügen noch ein Bemerkung zum *Kreiselkompaß* ein. Er leistet bei der Navigation gute Dienste. Er hält die Richtung zum Rotationspol der Erde und kann darin mit der Magnetnadel verglichen werden. Ein rotierender Kreisel ist aber ein dreidimensionales Werkzeug. Können wir ihn formal zweidimensional erscheinen lassen, indem wir seine Figurenachse in die Tangentialebene zwingen? Merkwürdigerweise ist ein Kreisel, dessen Figurenachse in die Fläche gezwungen wird, überhaupt nicht geeignet, die Richtung zu halten. Das liegt daran, daß er bei ebener Fläche nicht nur gleichförmig um seine Figurenachse rotiert, sondern diese selbst sich auch gleichförmig um die Normale der Fläche dreht. Letztere Drehung kann man zwar am Anfang unterbinden, wenn sich die Normalenrichtung aber auf einer gekrümmten Fläche ändert, setzt sich die Figurenachse wegen der Präzession unweigerlich in Bewegung, deren Ergebnis dann u.a. von der Geschwindigkeit abhängt, mit der sich der Kreisel bewegt. Im Gegensatz zu einem solchen Kreisel unter Zwangsbedingung funktioniert der Kreiselkompaß dank der *freien* Beweglichkeit der Figurenachse in allen Raumrichtungen, der freien Aufhängung im Schwerfeld und der Erdrotation. – Lassen wir die Oberfläche der Erde hinter uns. Bei der Navigation durch den Raum, im freien Fall durch das Schwerfeld der Erde oder des Sonnensystems, bewegt sich die Achse des Gyroskops nach den Gesetzen für den Drehimpuls. In gekrümmten Räumen wird der Drehimpuls nur näherungsweise parallel verschoben. Er unterliegt kleinen Änderungen durch eine charakteristische Spin-Bahn-Wechselwirkung, die durch die Krümmung vermittelt wird. Gyroskopexperimente in der Erdumlaufbahn können den integralen Effekt der Parallelverschiebung messen.

Der besprochene Orientierungswechsel, der bei paralleler Verschiebung um eine geschlossene Kurve auftritt, bestimmt die Krümmung auch in Räumen mit mehr als zwei Dimensionen. Diese kann von Ort zu Ort variieren. Dann betreten wir das Gebiet der Differentialgeometrie. Im folgenden betrachten wir aber nur Räume und

Welten konstanter Krümmung.

Traditionell heißt eine Geometrie nichteuklidisch, wenn das Parallelenaxiom nicht mehr verwendet werden darf [104]. Das ist immer dann der Fall, wenn wir mit einer Krümmung rechnen müssen. Der einfachste Fall der nichteuklidischen Geometrie scheint uns die Kugel zu sein. Sie ist bei unseren Bemühungen um Einsicht in die ungewohnten Zusammenhänge ein vertrautes Beispiel. Die Kugel ist besonders anschaulich, weil sie in einen euklidischen Raum eingebettet werden kann und nichts durch Entartung vereinfacht wird. Aus der Kugelgeometrie wird eine ebene Geometrie, wenn die Kugel aus ihrem Mittelpunkt auf die Ebene projiziert wird. Die Großkreise werden dann Geraden und die sphärischen Dreiecke aus Großkreisbögen werden gewöhnliche ebene Dreiecke mit geraden Seiten. Auf der Kugel gibt es keine Parallelen, denn zwei Großkreise schneiden sich immer in zwei Punkten. Wir können die Kugel mit ihren Großkreisen auch geradentreu auf die Ebene abbilden. Dies geschieht durch Projektion aus dem Mittelpunkt (Abb. 7.6 und 7.8). Da ein Großkreis ein ebener Schnitt der Kugel ist, wobei die Ebene durch den Mittelpunkt der Kugel geht, ist seine Projektion der Schnitt dieser Ebene mit der Projektionsebene, also eine richtige Gerade (Abb. 7.6). Wir erhalten die *elliptische Geometrie*. Merkwürdigerweise ist die Kugelgeometrie aber in der historischen Diskussion des Parallelenaxioms selten in Betracht gezogen worden, weil die Mittelpunktprojektion der Kugel, die allein geradentreu ist, die Kugeloberfläche *nicht* umkehrbar eindeutig auf die Ebene und außerdem den Äquator ins Unendliche abbildet. Auf der Kugel schneiden sich zwei Großkreise immer in zwei Punkten. Das wird aber in der ebenen Projektion nicht deutlich, weil die beiden Schnittpunkte in dieser Projektion immer zusammenfallen. Wie wir im nächsten Kapitel sehen werden, lassen die Kugeln im euklidischen Raum manche Beziehungen im Dunkeln, weil die entscheidenden definierenden Gebilde der Geometrie nicht reell sind.

Hier hilft uns die dreidimensionale Minkowski-Welt⁴. Die Gegenstücke zu den Kugeln im euklidischen Raum sind wieder Flächen festen Abstands von einem Zentrum. Nun ist aber dieser Abstand pseudo-euklidisch, und wir wollen diese Flächen also *Pseudokugeln* nennen. Pseudokugeln sind Hyperboloide zum gegebenen Asymptotenkegel. Im Falle zeitartiger Lage zum Ursprung ist das Hyperboloid zweischalig. Eine solche Fläche ist in der Raum-Zeit der geometrische Ort festen zeitlichen Abstands zum Ursprung, d.h. eine Zeitschale. Im analogen Impulsraum enden auf ihr die Impulsvektoren zu fester Ruhmasse, und man nennt sie Massenschale. In Abbildung 5.21 haben wir das schon einmal verwendet. Im Falle raumartiger Lage zum Ursprung ist das Hyperboloid einschalig. Die Tangentialebenen solcher Hyperboloi-

⁴Wir fügen einfach eine zweite Raumdimension hinzu, aber halten die Minkowski-Signatur im Analogon des Satzes des Pythagoras. Das Abstandsquadrat von zwei Punkten $P = [t, x, y]$ und $P + dP = [t + \Delta t, x + \Delta x, y + \Delta y]$ wird $\Delta s^2 = \Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2$. So wie beim Übergang von der euklidischen Ebene zum euklidischen Raum aus dem Kreis eine Kugel wird, entsteht beim Übergang von der pseudo-euklidischen Ebene zum pseudo-euklidischen Raum aus der Hyperbel ein (zweischaliges) Hyperboloid. Die beiden lichtartigen Geraden durch ein Ereignis werden durch einen Doppelkegel ersetzt, den Lichtkegel.

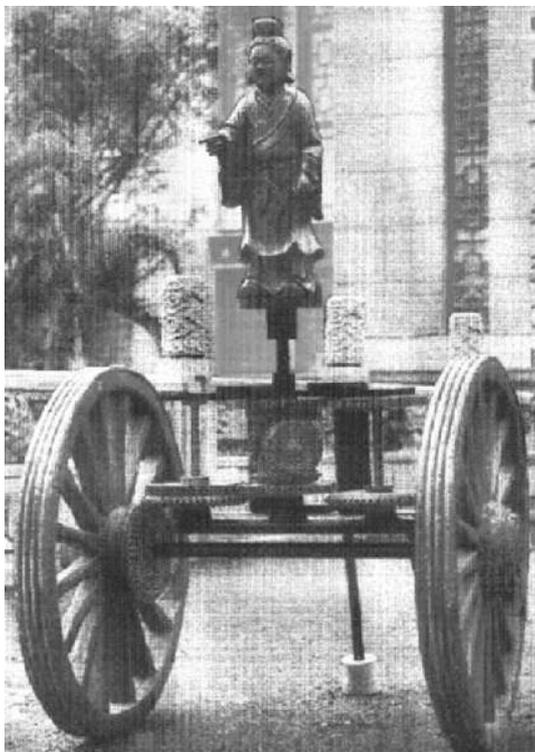


Abbildung 7.4: Ein Südzeigewagen

Die Legende berichtet von einem Kaiser Huang Di, der mit seiner Armee den Weg durch den Nebel fand, um – natürlich – Rebellen zu schlagen. Er benutzte einen Wagen, der ihm beständig die gleiche Richtung wies. Um die Möglichkeit dieser Geschichte zu beweisen, fand sich zur Zeit der Song-Dynastie ein Mechaniker, der ein Modell baute. Von diesem Modell ist nur eine Beschreibung geblieben und die Zeichnung einer Jadedfigur. Das hier gezeigte Modell steht vor dem Nationalmuseum in Taipeh. Yinan Chin hat mir dieses Bild zukommen lassen.

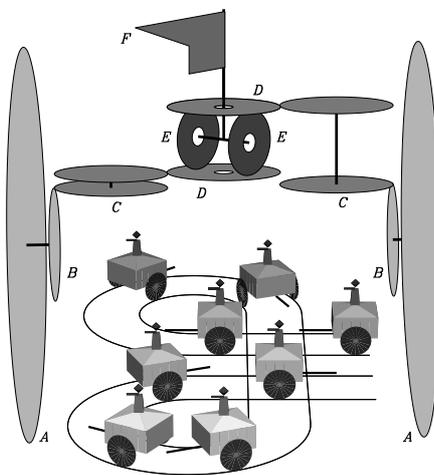


Abbildung 7.5: Ein Subtraktionsgetriebe

Die Skizze zeigt das Getriebe des Modells und seine Bewegung in der Ebene. Eine Drehung des Wagens ist mit ungleicher Drehgeschwindigkeit der beiden Räder A verbunden. Diese verschiedenen Drehgeschwindigkeiten werden über die Räder C auf die beiden um die senkrechte Achse frei beweglichen Hilfsräder D übertragen, die zusammen mit dem Läufer E das eigentliche Differential bilden. Die Rotation der Achse, die dann die Fahne F trägt, ist die halbe Summe der Rotationen der Räder D und damit die halbe *Differenz* der Drehung der Räder A . Es ist eine Frage der Übersetzung, daß die Rotation der Fahne gegen den Wagen die Drehung des Wagens kompensiert und die Fahne (auf einer Ebene) immer in die gleiche Richtung zeigt. Auf einer gekrümmten Fläche hält die Fahne die Richtung bei jedem kleinen Schritt wie wir das in Abbildung 7.1 getan haben.

de enthalten sowohl zeitartige als auch raumartige Richtungen und dienen uns gleich als gekrümmte Zeichenflächen für lokal pseudoeuklidische Flächen mit Krümmung⁵.

⁵Es muß an dieser Stelle wieder darauf hingewiesen werden, daß die Bezeichnung Hyperboloid eigentlich unzulässig auf unsere Anschauung zurückgreift, die in einer Darstellung unbewußt zu den Cartesischen Koordinaten auch eine euklidische Metrik denkt. Auch die Pseudokugeln sind Kugeln nach ihrer Definition. Ihr einziger Unterschied zur euklidischen Kugel ist die Tatsache, daß sie sich

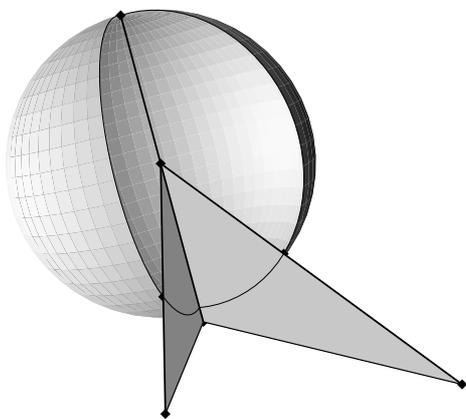


Abbildung 7.6: Azimutalprojektion der Kugel

Wir sehen, wie die Kugel aus ihrem Mittelpunkt auf die Ebene projiziert wird. Da die Großkreise Schnitte der Kugel mit den Ebenen durch den Mittelpunkt sind, sind ihre Projektionen die Schnitte dieser Ebenen mit der Projektionsebene, also Geraden. Zwei Großkreise schneiden sich immer in *zwei* Punkten, die aber auf nur *einen* Punkt der Projektionsebene abgebildet werden. Das Bild der Kugel überdeckt die ganze Ebene.

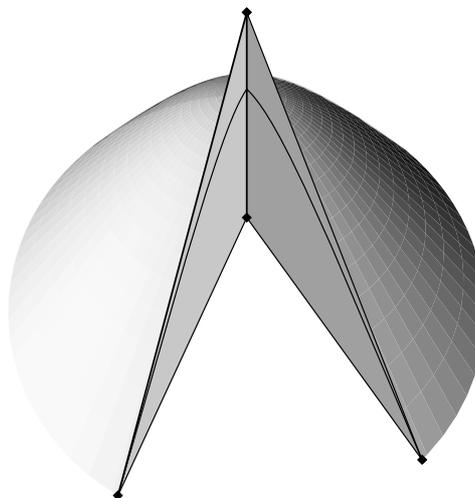


Abbildung 7.7: Azimutalprojektion der Schale eines Hyperboloids

Analog zur vorigen Abbildung wird das Hyperboloid aus dem Mittelpunkt auf die Ebene projiziert. Das Bild der Schale überdeckt nur das Innere eines Kreises, der das Bild des Asymptotenkegels ist. Wie im Fall der Kugel wird der Kreis zweimal überdeckt – das zweite Mal durch das Bild der zweiten Schale.

Die kürzesten Linien sind nun (den Großkreisen entsprechend) die Schnitte des Hyperboloids mit den Ebenen durch den Mittelpunkt. Die Spiegelung an solchen Ebenen läßt das Hyperboloid festen Abstands ja unverändert, die Ebenen durch den Mittelpunkt sind Symmetrieebenen. Also ist jeder Schnitt mit einer Ebene durch das Zentrum der Pseudokugel eine Geodäte. Projizieren wir das Hyperboloid auf die Ebene, haben wir wieder die üblichen Geraden vor uns, mit denen wir Geometrie betreiben können (Abb. 7.7). – Speziell die Geodäten auf der Zeitschale werden auf gerade Linien im Kreisinneren projiziert. Die Schnittgeraden zweier Ebenen durch den Mittelpunkt markieren auf der Projektionsebene einen Punkt, den Schnittpunkt der entsprechenden Geraden. Liegt dieser nicht innerhalb des Kreises, schneiden sich die Geodäten auf dem Hyperboloid nicht. Das wesentlich Neue liegt also darin, daß *nicht mehr alle* Punkte und Geraden der Projektionsebene zur Geometrie gehören: Die Punkte außerhalb des Schnitts mit dem Asymptotenkegel bleiben ausgeschlos-

nicht im Endlichen schließen. Auch dieser Unterschied geht verloren, wenn wir den projektiven Standpunkt einnehmen, in dem das Unendliche nicht mehr endgültig festgelegt ist.

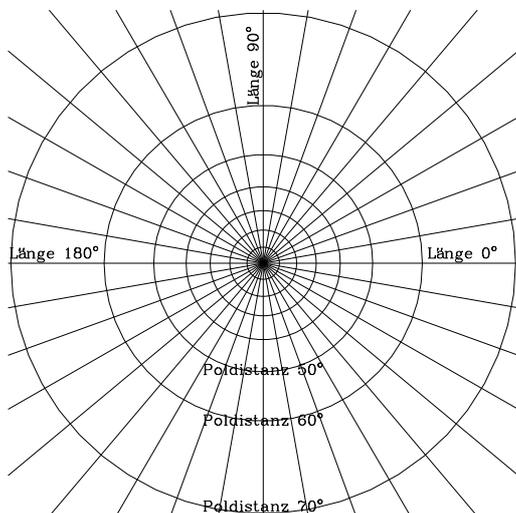


Abbildung 7.8: Linien gleicher Poldistanz in der Projektion der Kugel

Jedermann kennt Karten in Azimutalprojektion, wie sie für die Polargegenden in Gebrauch ist. Sie verzerrt die Flächen stark. Bereits der Äquator wird ins Unendliche geschoben. Dafür ist die Azimutalprojektion aber geradentreu und daher eben der weiteren Behandlung mit der projektiven Geometrie angepaßt.

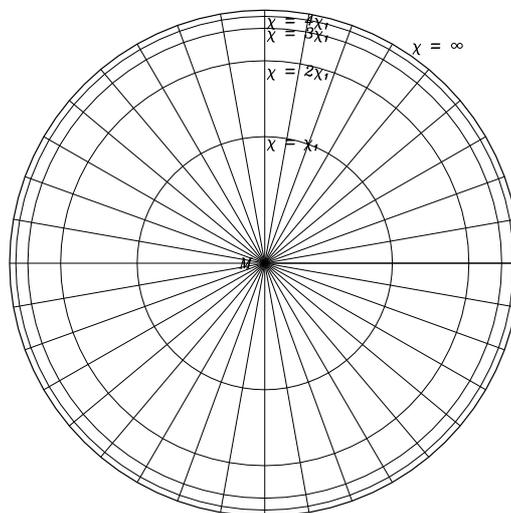


Abbildung 7.9: Linien gleicher Poldistanz in der Projektion der Schale

Wie bei der Kugel ist die Azimutalprojektion geradentreu. Die Verzerrung der Flächen ist aber das Gegenteil vom euklidischen Fall. Zum Rand der Projektion hin rücken Punkte festen Abstands immer mehr zusammen. Wir erinnern auch an die Auswertung des Stoßes in Abb. 5.6. Die Draufsicht ist eine solche Azimutalprojektion der Massenschale.

sen. Das Unendliche wird auf einen endlichen Kreis abgebildet. Zwei Geraden, die sich nicht *innerhalb* des Kreises schneiden, sind nun parallel zu nennen. Ihre Schnittpunkte liegen – im Modell der projektiven Ebene – „jenseits des Unendlichen“. Dieses Bild heißt *Kleinsches Modell* der nichteuklidischen Ebene, seine Geometrie heißt *hyperbolische Geometrie* und wurde von Gauß, Bolyai und Lobachevski gefunden [104].

An dieser Stelle erinnern wir noch einmal an den relativistischen Billardstoß (Abb. 5.6 und 7.9). Die Kurve der Geschwindigkeiten, die sich nach einem relativistischen Stoß ergeben, ist ein Kreis, allerdings ein Kreis nach der Metrik auf der Zeitschale. Wir gewinnen ihn explizit, wenn wir einen normalen Kreis um den Mittelpunkt des Kleinschen Modells so verschieben, daß sein Rand über den Mittelpunkt des Modells geht. Diese Verschiebung ist eine Lorentz-Drehung im Raum-Zeit-Diagramm und eine Translation in der nichteuklidischen Geometrie⁶.

Erinnern wir uns an die Definition der Krümmung am Anfang dieses Abschnitts, so ist die Krümmung der Zeitschale negativ. Das scheint dem Augenschein zu widersprechen, aber der Augenschein unterstellt stillschweigend euklidisches Maß. Wir

⁶Man spricht von der Lobachevski-Geometrie des Geschwindigkeitsraums.

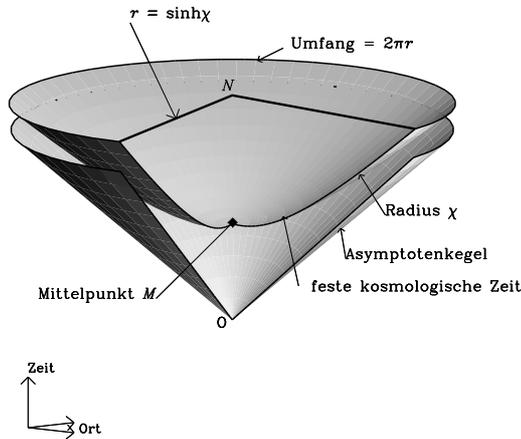


Abbildung 7.10: Fläche und Umfang auf der Zeitschale

Analog Abbildung 7.2 ist hier eine Kalotte gezeichnet, die nun aber nach den Regeln des Minkowski-Raumes vermessen werden soll. Dann ist der Radius auf der Schale eben kürzer als seine Projektion, der Radius in der Schnittebene. Entsprechend ist der Umfang größer als erwartet.

$U^2 > 4\pi F > 4\pi^2 \varrho^2$
für $\varrho > 0$. Die Schale ist also negativ gekrümmt.

haben jedoch das *pseudoeuklidische* Maß zu beachten, und danach ist die Projektion länger als die projizierte Kurve (Abb. 7.10). Der Umfang eines Kreises wird also größer als erwartet (siehe Gl. (7.1)).

$$U[\varrho] > \sqrt{4\pi F[\varrho]} > 2\pi\varrho \quad \text{falls } \varrho > 0. \quad (7.2)$$

Wir veranschaulichen die Krümmung durch ein Parkett aus regelmäßigen Fünfecken (Abb. 7.11). Auf der Kugel ist so ein Parkett bekannt. Es entspricht einem regelmäßigen Polyeder, dem Dodekaeder (zum allgemeinen Problem der Parkettierung [103]). Drei Fünfecke stoßen an jeder Ecke zusammen. Folglich ist der Winkel an jeder Ecke gleich $2\pi/3$, und die Winkelsumme in einem solchen Fünfeck auf der Kugel beträgt $10\pi/3$. Das ist größer als der euklidische Wert 3π , die Kugel ist ja auch positiv gekrümmt. Nun wenden wir uns der Pseudokugel zu. Hier stoßen z.B. jeweils vier

Abbildung 7.11: Parkettierung der Zeitschale mit regulären Fünfecken

Auf einer Fläche konstanter negativer Krümmung gibt es reguläre Fünfecke mit fünf rechten Winkeln, die sich zu einem Parkett zusammenlegen lassen, wie es die Schale andeutet. In der Grundfläche sieht man die Mittelpunktprojektion der Schale, in der alle Geodäten Geraden sind. Die Seitenlänge des regulären Fünfecks mit fünf rechten Winkeln ist $\phi = \text{Arsh}[\sqrt{(1 + \sqrt{5})/2}]$.

M.C.Escher[42] zeigt in seinen Graphiken „Grenzkreise“ Parkettierungen der Schalen negativer Krümmung mit regelmäßigen Sechsecken.

Fünfecke an einer Ecke zusammen, die Winkel an den Ecken sind also $\pi/2$, die Winkelsumme $5\pi/2$, also kleiner als der euklidische Wert. Der Paralleltransport um ein solches Fünfeck läßt sich analog Abb. 7.1 in Abb. 7.11 nachvollziehen. Dabei tritt hier eine Drehung *gegen* den Sinn des Umlaufs auf. Der Exzeß der Winkelsumme ist negativ. Umfahren wir ein solches Fünfeck unter Festhalten der Blickrichtung wie in Abbildung 7.1, erhalten wir eine Drehung der Tangentialebene wieder um $\pi/2$, diesmal aber *gegen* den Drehsinn des Umlaufs⁷.

7.2 Der Kosmos

Die *Äquivalenz von träger und schwerer Masse* erzwingt die Anerkennung der Krümmung der Welt und auch des Raums. Die Entdeckung, daß alle Körper in einer bestimmten Näherung gleich schnell fallen, steht mit anderen am Anfang der modernen Physik. Aus der Bestimmung der Bewegung im Schwerfeld kürzt sich die träge Masse (der Proportionalitätsfaktor zwischen Impuls und Geschwindigkeit) gegen die schwere Masse (den Proportionalitätsfaktor zwischen Schwerkraft und Feldstärke des Schwerfeldes) heraus. Diese Beobachtung ist immer mehr verfeinert worden [41, 108, 20, 1]. Nach den Versuchen von Dicke [108] und Braginski [20] ist jetzt eine Genauigkeit von 10^{-12} erreicht⁸. Wird die Äquivalenz von träger und schwerer Masse als Prinzip vorangestellt, muß man schließen, daß selbst Lichtstrahlen, Platons gerade Linien, vom Schwerfeld beeinflusst werden, denn sie transportieren Energie und deren Masse. Die von einem Punkt ausgehenden Strahlen scheinen *gegeneinander* verbogen und verdrillt, je nach Krümmung der Welt. Wellengleichungen (die Maxwell-Gleichungen der Elektrodynamik eingeschlossen) mit konstanten Koeffizienten können nicht mehr gelten. Ähnlich der Wellengleichung für ein brechendes Medium hängen die Koeffizienten nun von Ort und Zeit, genauer der Position im Gravitationsfeld ab. Solche veränderliche Koeffizienten sind aber Derivate der Metrik einer gekrümmten Welt. Das ist der entscheidende Punkt. Die Strahlen eines Büschels können sich erneut schneiden: es entstehen Brennflächen und Brennpunkte. Die übliche Sprechweise „verbogen und verdrillt“ vertuscht, daß der *einzelne* Lichtstrahl nicht verbogen sein kann, da es keine Vergleichslinie gibt, die weniger gebogen ist. Der Lichtstrahl markiert die operativ geradeste Linie. Die Lichtablenkung durch ein massives Objekt in der Sichtlinie vergleicht mit einem anderen Raum, in dem das Objekt real oder virtuell aus der Sichtlinie entfernt ist. Wir vergleichen zwei verschiedene Räume, und die Geodäten des einen sind jeweils gegen die Geodäten des andern „verbogen“. Erst die *relative* Geometrie des Strahlbüschels definiert eine

⁷Die Rotation der Tangentialebene findet ihren physikalischen Ausdruck in der *Thomas-Präzession*.

⁸Natürlich hängt diese Genauigkeit von der speziellen Versuchsanordnung ab. Deshalb wird weiter nach Bestätigungen oder Abweichungen vom Äquivalenzprinzip gesucht. In jedem Falle hängt die Bewegung eines Teilchens in einer gekrümmten Welt von seinem Drehimpuls ab. Es ist eine komplizierte Frage, wie man Metrik und Krümmung aus der Beobachtung der Bewegung von Teilchen unbekannter Struktur herauslesen kann [2].

Ablenkung durch das Auftreten von Brennflächen und Brennpunkten.

Die Welt ist gekrümmt, und im allgemeinen ist es auch jeder Raum. Die Krümmung ist im einzelnen nicht homogen, denn die schweren Massen, die das Schwerefeld erzeugen, sind selbst Inhomogenitäten und auch nicht homogen verteilt. Sie verursachen eine Lichtablenkung, die man schon nach der Newtonschen Mechanik abschätzen kann, die aber nach der Allgemeinen Relativitätstheorie doppelt so groß ist, weil nicht nur die Welt allgemein, sondern auch der Raum im einzelnen durch die lokale Materieverteilung gekrümmt wird. Die Lichtablenkung [37] war die erste Voraussage der Allgemeinen Relativitätstheorie, die durch die Beobachtung bestätigt werden konnte. Nachdem sie 1919 durch A.S.Eddington erstmals zweifelsfrei gemessen wurde, ist sie inzwischen nicht nur sicher bekannt⁹, sondern hat sich in ein Instrument zur Erkundung des Universums gewandelt. Kosmische Objekte großer Masse werden durch die von ihnen verursachte Lichtablenkung sichtbar, auch wenn ihre Leuchtkraft zu klein für unsere Teleskope ist. Man nennt sie dann Gravitationslinsen [115] (Abb. 7.12, 7.13, 7.14). Das Schwerefeld eines massiven Objekts faltet die Lichtkegel (Abb. 7.15). Darüber hinaus können supermassive und superdichte Massekonzentrationen überhaupt verhindern, daß Licht aus ihrem Schwerefeld entweicht. Solche *Schwarzen Löcher* scheinen in den Zentren großer Galaxien zu sitzen und auch für die große Leuchtkraft verantwortlich zu sein, die an den Quasaren beobachtet wird.

Beschränken wir uns aber auf die Betrachtung eines Kosmos, in dem kein Ort vor dem anderen ausgezeichnet sein soll (der Ort soll relativ sein, von den Massekonzentrationen in Sternen, Galaxien, Galaxienhaufen und anderen großen Strukturen wollen wir gerade absehen), kann die Welt als zeitliche Folge homogener Räume angesehen werden, die eine konstante Krümmung haben (also unseren Kugeln, Ebenen oder Massenschalen entsprechen) und die expandieren oder kontrahieren (Abb. 7.16). Das ist sicher eine grobe Vereinfachung, aber es ist die Basis der Kosmologie. Ihre verlässliche Begründung ist ein kompliziertes Problem sowohl aus der Sicht der Theorie¹⁰ als auch der Sicht der Beobachtung. – Es ist wichtig, Krümmung des Raums und Krümmung der Welt auseinanderzuhalten. Es ist die Krümmung der Welt, die von den Einsteinschen Gleichungen bestimmt wird. Die Krümmung eines Raums, der ja nun ein Schnitt durch diese Welt ist, hängt davon ab, wie wir den Schnitt legen. Im allgemeinen hat man dabei alle Freiheiten, nur soll der Raum ausschließlich raumartige Richtungen enthalten. Hier schränken wir die Freiheit ein: Es sollen nunmehr nur noch homogene Raumschnitte erlaubt sein.

Die Welt, die wir hier betrachten, soll den Kosmos vorstellen. Die homogenen

⁹Die beste direkte Bestimmung ist mit der Radioposition des Quasars 2C379 möglich, der an jedem 8. Oktober von der Sonne bedeckt wird.

¹⁰Wenn wir uns auf die Einsteinschen Gleichungen berufen, die auf planetarer Skala geprüft werden können, müssen wir ihr „makroskopisches Mittel“ konstruieren, das dann auf die „gemittelte“ Beobachtung passen sollte. Es ist aber nicht einfach zu sehen, daß die gemittelten Gleichungen wieder die Einsteinschen Gleichungen sind [2].

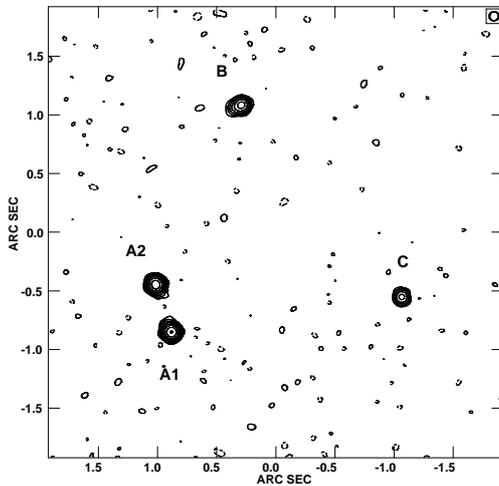


Abbildung 7.12: Das Vierfachbild MG 0414+0534

Dieses Bild von MG 0414+0534 (Sternbild Stier) entsteht im 22 GHz-Band. Die Strahlung eines Quasars im Hintergrund wird von einer hier nicht sichtbaren Galaxie im Vordergrund abgelenkt. Die Galaxie hat erst das Hubble Space Telescope finden können. Ohne das Gravitationsfeld der Galaxie wäre das Bild des Quasars strukturlos und punktförmig [67].

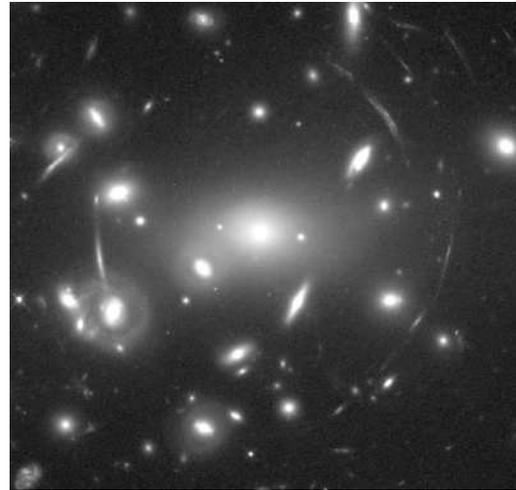


Abbildung 7.13: Der Galaxienhaufen Abell 2218 als Gravitationslinse

Zu sehen ist der Galaxienhaufen Abell 2218 (Sternbild Drache) und mehrere von ihm abgebildete Galaxien im Hintergrund, die in Form kleiner Kreisbögen angeordnet ist. Der Galaxienhaufen hat eine Entfernung von $525 h^{-1}$ Mpc (Rotverschiebung $z = 0.175$). Die abgebildeten Galaxien haben dagegen Rotverschiebungen von $z \approx 0.5 - 2.5$ [78].

Raumschnitte numerieren wir mit einer Zeitkoordinate, die *kosmologische Zeit*¹¹ genannt wird. Die Krümmung der Welt K_{Welt} setzt sich dann aus dem Quadrat der Expansionsrate H und der Raumkrümmung K_{Raum} zusammen. Einstein zeigte, daß die Weltkrümmung von der Materiedichte bestimmt wird. In unserem Falle ist die Weltkrümmung gleich einem Grundniveau, d.h. der kosmologischen Konstanten, plus der entsprechend normierten Massendichte.

$$K_{\text{Welt}} = H^2 + K_{\text{Raum}} = K_{\text{Welt}0} + \text{Massendichte} \quad (7.3)$$

schreiben. Dies ist die *Friedmann-Gleichung*. – Im Grenzfall verschwindender¹² Massendichte sind nicht nur die Raumschnitte, sondern die Welt selbst homogen. Diese Kosmen heißen nach W.deSitter. Wir wollen sie jetzt untersuchen.

¹¹Ein Zeitkoordinate mit solch einem Titel sollte eigentlich eine ordentliche, auf physikalische Beobachtbarkeit mit Uhren, Lichtquellen und Spiegeln gegründete Definition haben. Im aktuellen Universum, nicht in unserem vereinfachten Modell, könnte man es aussichtslos finden, Uhren zu synchronisieren. Auch die kosmologische Zeit ist also zunächst nur ein Artefakt des Modells [2].

¹²Verschwindend heißt hier vernachlässigbar gegen die Raumkrümmung oder die kosmologische Konstante.

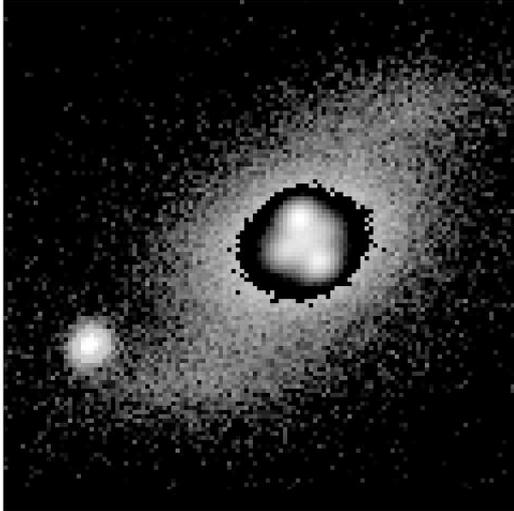


Abbildung 7.14: Das Einstein-Kreuz

Die zentrale Massenkonzentration der Vordergrundgalaxie erzeugt ein vierfaches Bild des Hintergrundquasars Q2237+0305 (Sternbild Wassermann), das Einstein-Kreuz genannt wird. Der Quasar steht fast genau hinter dem Zentrum der Vordergrundgalaxie. Dessen Helligkeit ist in der Abbildung abgezogen, damit alles zu sehen ist. Links unten steht ein Vordergrundstern.

Dieses Bild des Einstein-Kreuzes ist von der Erde aus gewonnen. P. Notni hat es mit dem 1.5m-Teleskop von Maidanak am 17.9.95 aufgenommen [139]. Wegen der Eigenbewegung der Galaxie und ihrer Komponenten hat sich das Bild seit der Entdeckung des Kreuzes 1988 bereits deutlich verändert.

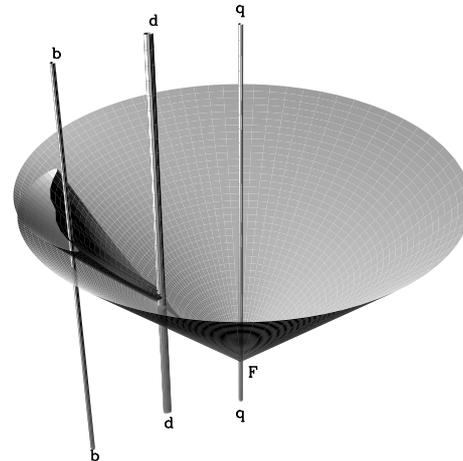


Abbildung 7.15: Die Faltung des Lichtkegels

Die Abbildung zeigt die Weltlinien einer Lichtquelle q , einer ablenkenden Masse d und eines Beobachters b und den Lichtkegel eines Blitzes F . Durch die ablenkende Masse wird die Ausbreitung gestört, und es entsteht eine Falte unabhängig von der Art der Störung, nur die genaue Form der Falte hängt von der Störung ab. Die Weltlinie des Beobachters schneidet hier den gefalteten Lichtkegel dreimal, d.h., der Beobachter sieht das Ereignis zu drei verschiedenen Zeiten und aus drei verschiedenen Richtungen, die ihrerseits ja durch die räumlichen Normalen der Wellenfronten gegeben sind. Hier weicht die erste Richtung nach rechts ab, die zweite nach links, die dritte ist am wenigsten abgelenkt. Die Faltung führt immer auf eine ungerade Anzahl von Bildern, jedoch ist das am wenigsten abgelenkte im allgemeinen von der Linse verdeckt.

Zunächst orientieren wir uns an dem Fall expandierender Pseudokugeln (Abb. 7.18). Wie im Fall positiver Krümmung, wo die Welt als zeitliche Folge immer größer (nach Fläche und Krümmungsradius) werdender Kugeln darzustellen ist, ist die Welt nun eine Folge immer größer (nach Krümmungsradius) werdender Pseudokugeln. Der Krümmungsradius ist identisch mit der verstrichenen Zeit. Im Grunde haben wir die pseudo-euklidische Welt vor uns, in der wir nur neue Koordinaten gewählt haben. Die kosmologische Zeit τ ist auf einer Zeitschale fest, und auf der

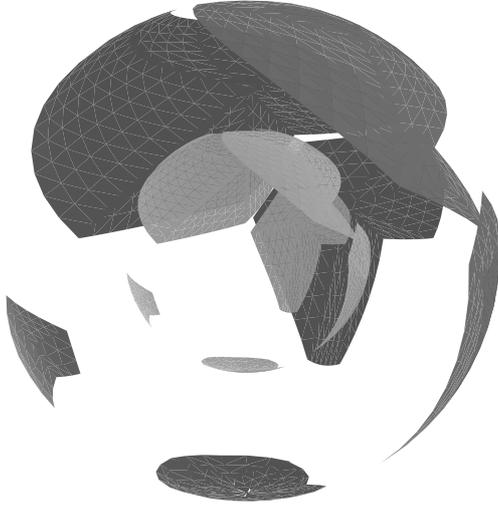


Abbildung 7.16: Homogene Expansion
Bei der Expansion einer Kugel werden alle Abstände größer, die Kugelkoordinaten (geographische Länge und Breite) der Figuren bleiben aber konstant. Die Geschwindigkeit der Abstandszunahme ist proportional dem Abstand auf der Kugelfläche, wobei die Figuren sich nicht eigentlich gegeneinander bewegen: Bezogen etwa auf den Abstand vom Pol zum Äquator bleiben alle Entfernungen unabhängig von der Größe des Globus. Die Kugelkoordinaten entsprechen den mitbewegten (expansionsbereinigten) Koordinaten der Kosmologie.

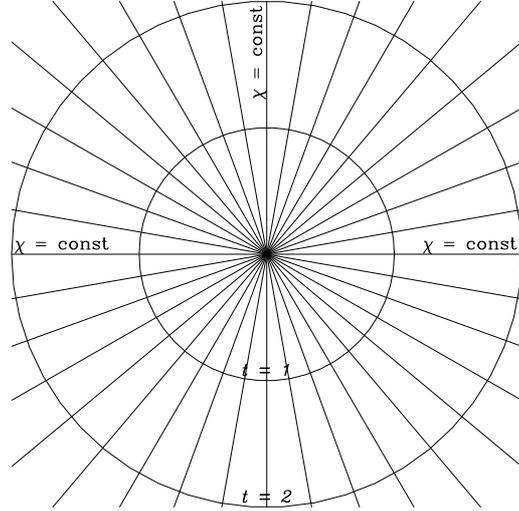


Abbildung 7.17: Ebener Schnitt durch die expandierenden Kugeln

Wir verzichten auf die Darstellung der geographischen Länge und erhalten den ebenen Rahmen für Fahrpläne im expandierenden geschlossenen Kosmos. Bei einem bestimmten Expansionsgesetz (Abb. 7.22) kann der geschlossene Kosmos auch leer sein.

Zeitschale wählen wir Koordinaten χ , die sich mit der Expansion nicht verändern, etwa Polarkoordinaten. Die neuen Koordinaten τ und χ setzen wir also so an, daß τ die Zeitschalen zum Ursprung numeriert ($c^2\tau^2 = c^2t^2 - r^2$), während konstantes χ eine Expansion beschreibt ($r = f[\chi] a[t]$). Die Transformation ist

$$t = \tau \cosh[\chi] , \quad r = \tau \sinh[\chi] .$$

Entfernungen vom Punkt $\chi = 0$, die durch eine feste Koordinate χ markiert sind, $d[\chi] = a[t]\chi$, werden mit der Zeit immer größer (Abb. 7.19). Wir nennen die Funktion $a[t]$, die hier einfach $a[t] = c\tau$ ist, den Expansionsparameter. Die Oberfläche einer Kugel mit dem Radius $d[\chi] = a[t]\chi$ ist

$$O[\chi] = 4\pi f^2[\chi] a^2[t] . \tag{7.4}$$

Sie ist hier also größer als nach euklidischer Geometrie erwartet, was die negative Krümmung anzeigt. Der spezielle Kosmos, den wir jetzt konstruiert haben, heißt

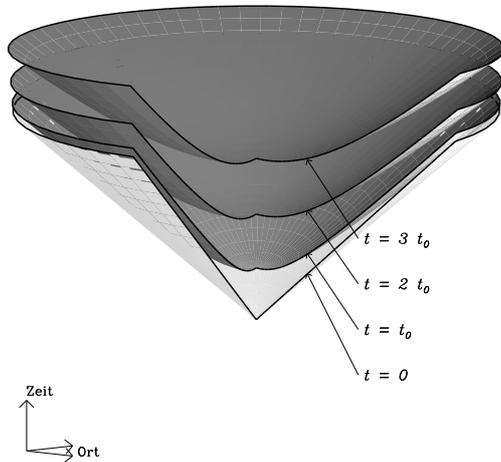


Abbildung 7.18: Milne-Kosmos

Wir sehen die homogene Expansion eines negativ gekrümmten Raums. Die Linien konstanter Pseudokugelkoordinaten sind gerade Linien durch das Zentrum des Asymptotenkegels, der ersichtlich eine Singularität ist. Diese kosmologische Singularität umfaßt in gewissem Sinne den gesamten Asymptotenkegel. Die geometrischen Örter fester Eigenzeit sind die negativ gekrümmten Zeitschalen. Die Welt ist dennoch eine Minkowski-Welt. Wir können auch eine Folge ungekrümmter Ebenen finden, die sich nicht ausdehnen. Diese Relativität der Krümmung findet sich, weil das Substrat nur virtuell vorhanden ist und keine Quelle des Gravitationsfeldes darstellt.

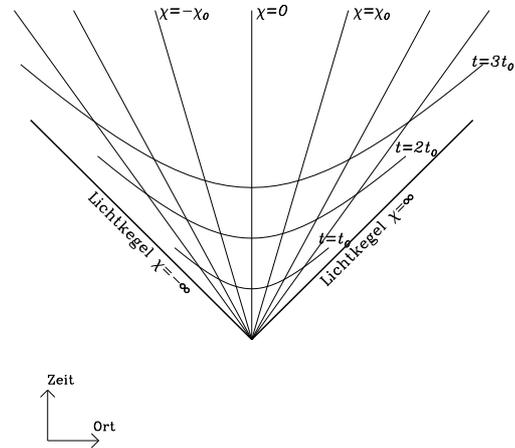


Abbildung 7.19: Ebener Schnitt durch den Milne-Kosmos

In einer Ebene fester Kugelkoordinaten, wo nur der Abstand von der Bezugsweltlinie und die Zeit eingetragen werden, sind die Weltlinien des Substrats die Geraden, die durch einen Punkt gehen und zeitartig sind. Die isotropen Geraden sind die gleichen wie in der Minkowski-Welt. Das Substrat ändert nichts an der Minkowski-Geometrie der Ebene. Es bestimmt aber die Aufblätterung der Welt. Die Räume konstanter kosmologischer Zeit sind (pseudoeuklidisch) orthogonal zu den Weltlinien des als virtuell gedachten Substrats.

Milne-Kosmos. Er ist eine Folge von Räumen negativer Krümmung und expandiert linear in der kosmologischen Zeit. Lokal unterscheidet ihn geometrisch nichts von der Minkowski-Welt, die ihrerseits eine Folge ungekrümmter und nicht expandierender Räume ist. Global existiert schon ein Unterschied: der Milne-Kosmos ist nur ein Teil der Minkowski-Welt, der einen Rand (den Kegelmantel) und eine Singularität (die Spitze) hat.

Der Milne-Kosmos (Abb. 7.19) ist direkt auf die ebene Minkowski-Welt gezeichnet. Wir betrachten nun die Kosmen, die auf die Oberfläche einer *einschaligen* Pseudokugel gezeichnet werden können. Diese ist das Gegenstück zu den zweischaligen Hyperboloiden, die wir eben benutzt haben. Während die Zeitschalen die Örter festen zeitlichen Abstands vom Ursprung waren, sind die einschaligen Pseudokugeln

jetzt Orte festen räumlichen Abstands vom Zentrum. Sie sind ebenso symmetrisch wie die Zeitschalen. Dementsprechend sind die Geodäten auf den einschaligen Pseudokugeln wieder Schnitte mit Ebenen durch das Zentrum. Während aber auf einer Zeitschale alle Geodäten raumartig sind, gibt es nun raumartige wie zeitartige Geodäten. Deshalb können wir versuchen, ein zweidimensionales Universum auf die Pseudokugel zu zeichnen.

Dazu wählen wir auf einer solchen Pseudokugel eine Schar zeitartiger Geodäten, die später die Linien $\chi = \text{const}$ werden sollen. Wir gewinnen sie natürlich aus ebenen Schnitten, wobei die Ebenen durch das Zentrum gehen. Nun haben zwei Ebenen eine Schnittgerade, und wir betrachten den Fall eines Ebenenbüschels, das von einer gemeinsamen Geraden getragen wird, so wie beim Milne-Kosmos alle Linien $\chi = \text{const}$ einen gemeinsamen Schnittpunkt in der Minkowski-Welt haben. Beginnen wir mit einer Pseudokugel der Form

$$T^2 - W^2 - X^2 - Y^2 - Z^2 + 1 = 0 . \quad (7.5)$$

Wir verwenden wieder Polarkoordinaten mit $R^2 = X^2 + Y^2 + Z^2$ und stellen sie im dreidimensionalen T - W - R -Raum dar. Auf zwei der drei Raumdimensionen wird in dieser Darstellung verzichtet, wir behalten sie aber im Auge. Wir zeichnen nun zeitartige Geodäten auf die Hyperkugel $T^2 - W^2 - R^2 + 1 = 0$, indem wir mit Ebenen $a_0T + a_1W + a_2R = 0$ schneiden. Um eine einparametrische Geodätenschar zu erhalten, wählen wir ein Ebenenbüschel, das von einer Geraden getragen wird. Die Ebenen sollen aus dem Hyperboloid Linien herauschneiden, die wir als Weltlinien von Objekten betrachten, deren Eigenzeit die kosmologische Zeit für den Kosmos absteckt, so wie das schon beim Milne-Kosmos geschehen ist. Es gibt drei wesentlich verschiedene Möglichkeiten, diese Weltlinienschar $\chi = \text{const}$ zu konzipieren. Im ersten Fall sei die Trägergerade des Ebenenbüschels lichtartig und *berühre* gerade das Hyperboloid. Dann wählen wir die Koordinatenachsen $[T, W, R]$ so, daß die Trägergerade die Richtung $[1, -1, 0]$ hat. Die Normalen der Ebenen festen χ haben dann Richtungen, die sich in der Form $[\chi, \chi, -1]$ parametrisieren lassen (Abb. 7.20). Wir schreiben

$$T + W = e^t \rightarrow R = \chi e^t .$$

Wenn wir uns auf dem Hyperboloid (7.5) befinden, folgt

$$T - W = \chi^2 e^t - e^{-t} .$$

Die Formeln für R und die Oberfläche O (7.4) zeigen uns, daß die Weltlinien $\chi = \text{const}$ einen exponentiell expandierenden Kosmos beschreiben, dessen Raumschnitte $t = \text{const}$ nach der euklidischen Geometrie zu vermessen sind. Die Mittelpunktprojektion des dreidimensionalen Hyperboloids in die Ebene zeigt die Weltlinienschar als Geradenbüschel, das eine Hyperbel schneidet (Abb. 7.21). Das Koordinatennetz $[t, \chi]$ füllt nur den Außenraum¹³. Die Hyperbel ist das metrisch Unendliche. – Von

¹³Das Außengebiet enthält die Punkte, von denen zwei reelle Tangenten an den Kegelschnitt existieren, sei er nun eine Ellipse, eine Parabel oder eine Hyperbel.

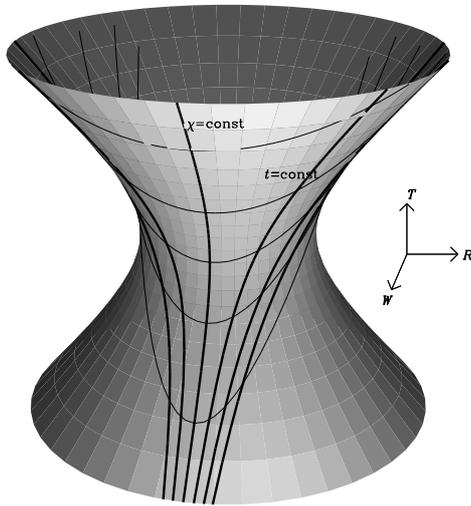


Abbildung 7.20: DeSitter-Kosmos. I.

Auf der fünfdimensionalen Pseudokugel $T^2 - W^2 - R^2 + 1 = 0$ werden die Koordinaten $T + W = e^t$, $T - W = \chi^2 e^t - e^{-t}$, $R = \chi e^t$ eingeführt. Dann erhalten wir für unser Linienelement $a[t] = e^t$, $r[\chi] = \chi$. In diesen Koordinaten sind die Raumschnitte eben, und der Raum dehnt sich exponentiell aus. Die Linien konstanter kosmologischer Zeit t sind Schnitte mit den Ebenen $W + T = \text{const}$. Diese Zeichnung ist analog Abb. 7.19. Die Explosion ist hier auf das Hyperboloid gezeichnet, nicht auf die Ebene.

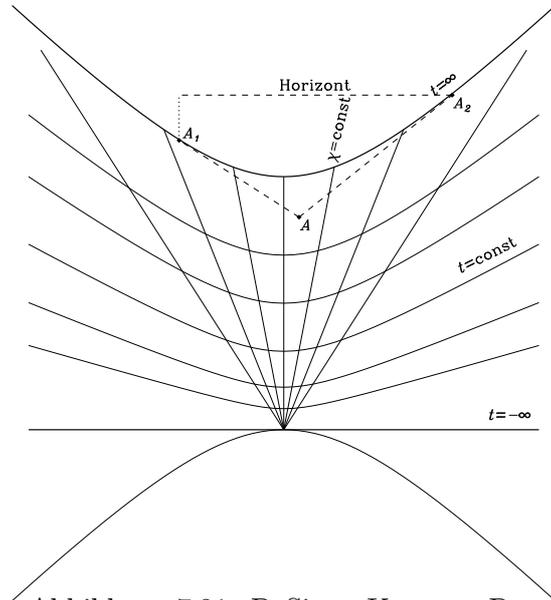


Abbildung 7.21: DeSitter-Kosmos: Projektion. I.

Wir projizieren das Hyperboloid von Abbildung 7.20 auf die Ebene. Das Unendliche ist ein Hyperbel, die Substratkongruenz stellt ein Bündel dar, das von einem Punkt im metrisch Unendlichen getragen wird. Die zeitartigen Geraden schneiden die Hyperbel, liegen aber im Außenraum. Bei unserer Wahl des Substrats sind die Räume fester kosmologischer Zeit nicht gekrümmt. Die Gleichung der Linien konstanter kosmologischer Zeit ist $y^2 - 1 = x^2 - (y+1)^2 e^{-2t}$, die der Linien konstanten χ ist $y = -1 + x/\chi$.

jedem Punkt des Außengebiets lassen sich die Tangenten an die Hyperbel legen. Sie stellen die lichtartigen Richtungen, den Lichtkegel des Punktes dar. Das metrisch Unendliche wird von den Lichtstrahlen bei einem bestimmten Wert der Ortskoordinate erreicht, *ohne* daß der Raum voll durchmessen wurde. Wir haben einen Kosmos mit Bewegungshorizont¹⁴ vor uns: Selbst wenn wir von A aus mit Lichtgeschwindigkeit abfliegen, können wir nicht jede Stelle des Substrats erreichen.

Wird die Achse des Ebenenbündchels so gelegt, daß sie das Hyperboloid *nicht* *schneidet*, können wir sie in die T -Achse legen¹⁵. Sie hat dann die Richtung $[1, 0, 0]$. Die Ebenennormalen können wir in der Form $[0, -\sin \chi, \cos \chi]$ parametrisieren (Abb. 7.22). Alles läuft weiter wie gehabt (Abb. 7.23). Nun ist aber nicht mehr die

¹⁴Der Fachausdruck ist Ereignishorizont.

¹⁵Wir führen dazu eine geeignete Lorentz-Transformation im 5-dimensionalen projektiven Raum durch.

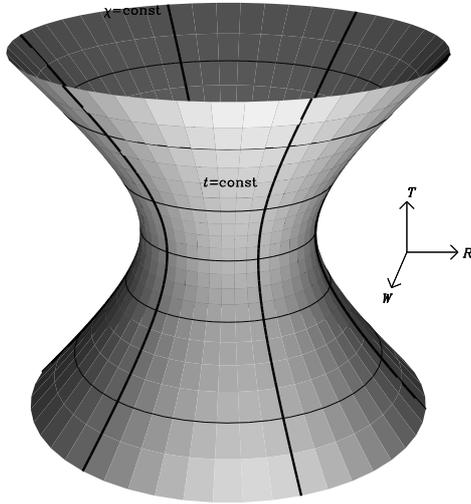


Abbildung 7.22: DeSitter-Kosmos. II. Auf der fünfdimensionalen Pseudokugel $T^2 - W^2 - R^2 + 1 = 0$ werden die Koordinaten $T = \sinh[t]$, $W = \cosh[t] \cos[\chi]$, $R = \cosh[t] \sin[\chi]$ eingeführt. Dann erhalten wir für unser Linienelement $a[t] = \cosh[t]$, $r[\chi] = \sin[\chi]$. In diesen Koordinaten sind die Raumschnitte positiv gekrümmt, und der Raum kontrahiert bis zu einem minimalen Volumen, um danach zu expandieren. Die Linien konstanter kosmologischer Zeit t sind Schnitte mit den Ebenen $T = \text{const}$.

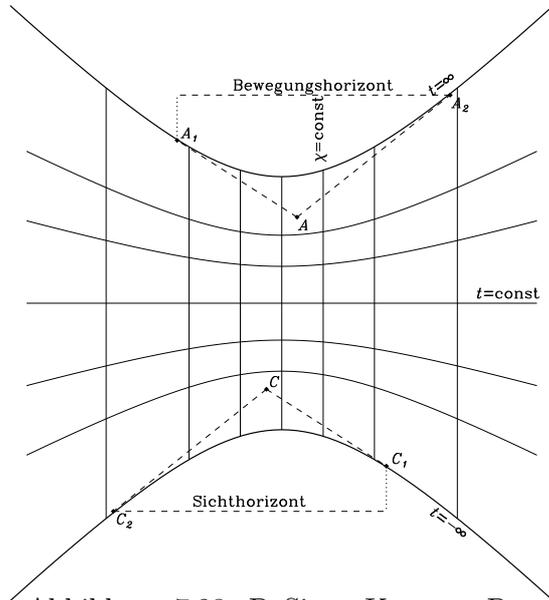


Abbildung 7.23: DeSitter-Kosmos: Projektion. II.

In dieser Projektion des Hyperboloids von Abbildung 7.22 ist die Substratkongruenz ein Strahlbüschel, das von einem Punkt außerhalb der Welt getragen wird. Die Kurven konstanter kosmologischer Zeit sind Hyperbeln verschiedener Öffnung: $y^2 \coth^2[t] - x^2 = 1$. Die Krümmung dreidimensionaler Raumschnitte ist hier positiv.

gesamte Hyperbel der Zeitpunkt $t \rightarrow \infty$, vielmehr ist die untere Hälfte $t \rightarrow -\infty$, also die tiefe Vergangenheit. Tangenten an diesen Teil indizieren einen Sichthorizont¹⁶: Das Licht, das den Punkt B erreicht, stammt aus einem begrenzten Bereich des Substrats. Kein Teleskop zeigt uns heute das Substrat über diese Grenze hinaus.

Schließlich legen wir die Achse des Ebenenbüschels so, daß sie das Hyperboloid *schneidet*. Dann können wir als Richtung $[0, 1, 0]$ wählen und die Ebenennormalen in der Form $[-\sinh \chi, 0, \cosh \chi]$ parametrisieren (Abb. 7.24). Nach Projektion in die Ebene ergibt sich Abbildung 7.25. Diese Konstruktion ist ähnlich der des Milne-Kosmos, nur sind dort die Weltlinien des expandierenden Substrats auf die pseudoeuklidische Ebene gezeichnet, hier dagegen auf die Pseudokugel. In beiden Fällen sind die – mit den hier nicht gezeichneten Dimensionen vervollständigten – Raumschnitte negativ gekrümmt.

Je nach Wahl der Weltlinien des Substrats erhalten wir positiv, negativ oder ungekrümmte Raumschnitte. Diese Freiheit hat die gleiche Wurzel wie die Frei-

¹⁶Der Facha Ausdruck ist Teilchenhorizont oder einfach Horizont.

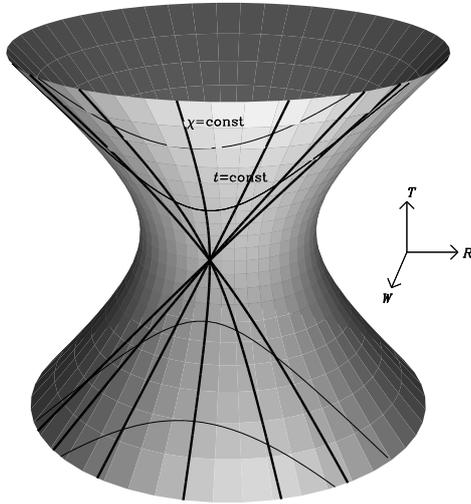


Abbildung 7.24: DeSitter-Kosmos. III.

Auf der fünfdimensionalen Pseudokugel $T^2 - W^2 - R^2 + 1 = 0$ werden die Koordinaten $T = \sinh[t] \cosh[\chi]$, $W = \cosh[t]$, $R = \sinh[t] \sinh[\chi]$ eingeführt. Dann erhalten wir für unser Linienelement $a[t] = \sinh[t]$, $r[\chi] = \sinh[\chi]$. In diesen Koordinaten sind die Raumschnitte negativ gekrümmt, und der Raum expandiert aus einer Singularität. Die Linien konstanter kosmologischer Zeit t sind Schnitte mit den Ebenen $W = \text{const}$.

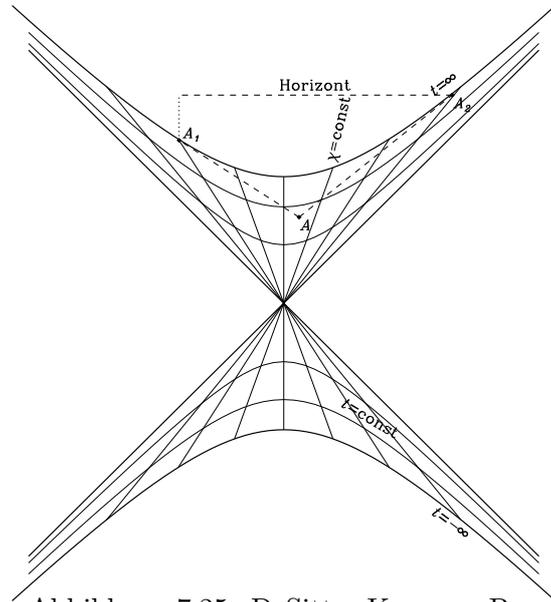


Abbildung 7.25: DeSitter-Kosmos: Projektion. III.

In dieser Projektion des Hyperboloids von Abbildung 7.24 ist die Substratkongruenz ein Strahlbüschel, das von einem Punkt innerhalb der Welt getragen wird. Die Kurven konstanter kosmologischer Zeit sind Hyperbeln gleicher Öffnung: $y^2 - x^2 = \tanh^2[t]$. Die Krümmung der dazugehörigen dreidimensionalen Raumschnitte ist negativ.

heit der Krümmung im Minkowski-Raum: Wir wählen die Weltlinien des Substrats rein geometrisch. Eine physikalische Wirkung des Substrats ist nicht vorhanden: Die Einsteinschen Gleichungen lassen hier keine Massendichte als Quelle der Weltkrümmung zu. Die Weltkrümmung ist eine geometrische Konstante. Erst wenn wir das Substrat als materielle Strömung konzipieren, deren Massendichte dann proportional der Weltkrümmung ist, entfällt die geometrische Wahlfreiheit der homogenen Raumschnitte. Die Wahl wird eindeutig. Die Krümmung des Raums kann an der Bewegung des Substrats physikalisch beobachtet werden.

Gleichung (7.5) ist nur eine Möglichkeit, zu einer höherdimensionalen Pseudokugel zu kommen. Die andere ist, die Koordinate W zeitartig zu wählen:

$$T^2 + W^2 - X^2 - Y^2 - Z^2 - 1 = T^2 + W^2 - R^2 - 1 = 0 .$$

Die Achse des Ebenenbüschels schneidet dieses Hyperboloid immer, wir wählen deshalb als Richtung $[0, 1, 0]$ und die Ebenennormalen in der Form $[0, -\sinh \chi, \cosh \chi]$ (Abb. 7.26). Wir finden den Anti-deSitter-Kosmos, der besonders in der mehrdimensionalen Kosmologie eine gewisse Rolle spielt (Abb. 7.27).

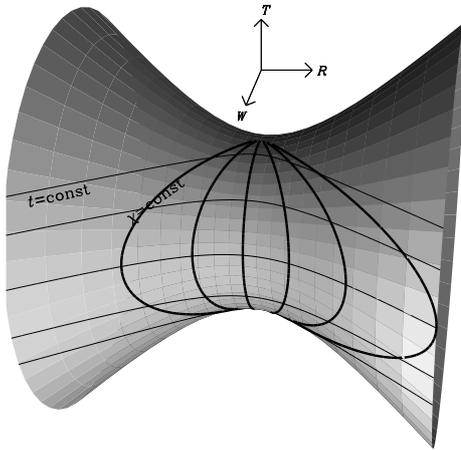


Abbildung 7.26: Anti-deSitter-Kosmos
Auf der fünfdimensionalen Pseudokugel $T^2 + W^2 - R^2 = 1$ werden die Koordinaten $T = \sin[t]$, $W = \cos[t] \cosh[\chi]$, $R = \cos[t] \sinh[\chi]$ eingeführt. Dann erhalten wir für unser Linienelement $a[t] = \cos[t]$, $r[\chi] = \sinh[\chi]$. In diesen Koordinaten sind die Raumschnitte negativ gekrümmt, und der Raum expandiert aus einer Singularität, um wieder in eine Singularität zu kontrahieren. Die Linien konstanter kosmologischer Zeit t sind Schnitte mit den Ebenen $T = \text{const}$.

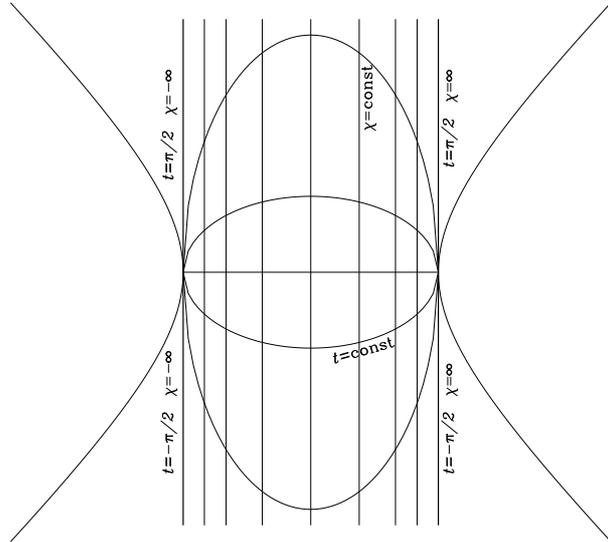


Abbildung 7.27: Anti-deSitter-Kosmos: Projektion

In dieser Projektion des Hyperboloids von Abbildung 7.26 ist der absolute Kegelschnitt wieder eine Hyperbel, die zeitartigen Geraden schneiden diesen Kegelschnitt aber nicht. Die Substratkongruenz ist ein Strahlbüschel, das von einem Punkt innerhalb der Welt getragen wird. Die Kurven konstanter kosmologischer Zeit sind Ellipsen mit einer festen Halbachse: $y^2 \cot^2[t] + x^2 = 1$. Die Linien $\chi = \pm\infty$ fallen mit den Periodengrenzen $t = \pm\pi/2$ zusammen. Sie sind der Rand des Gebiets, in dem Substrat und kosmologisches Modell definiert sind.

Die Ähnlichkeit der Geometrien von Hyperboloid und Kugel wird manifest, wenn wir sie in projektiven Koordinaten – die nun auch Koordinaten in der dreidimensionalen Welt sind, in der Hyperboloid und Kugel eingebettet ist – und der Polarität ausdrücken – die nun auch Metrik der dreidimensionalen Welt ist. Wir wollen das am Sinussatz der Dreiecke zeigen. Winkel und gegenüberliegende Seiten liegen in einer festen Relation, die in der euklidischen Geometrie

$$\frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \beta}{b} = \frac{\sin \gamma}{c}$$

lautet. Auf der Kugel lautet diese Relation

$$\frac{\sin \alpha}{\sin a} = \frac{\sin \beta}{\sin b} = \frac{\sin \gamma}{\sin c} .$$

In der Minkowski-Geometrie, wo die Drehungen in der Ebene zwei Fixstrahlen haben, finden wir (für Dreiecke aus drei zeitartigen Strecken)

$$\frac{\sinh \alpha}{a} = \frac{\sinh \beta}{b} = \frac{\sinh \gamma}{c} .$$

In der Galilei-Geometrie, wo der Winkel direkt durch Strecken gemessen wird, entartet die Formel in

$$\frac{\alpha}{a} = \frac{\beta}{b} = \frac{\gamma}{c} .$$

Auf der Zeitschale gilt

$$\frac{\sin \alpha}{\sinh a} = \frac{\sin \beta}{\sinh b} = \frac{\sin \gamma}{\sinh c} .$$

Auf der Hyperkugel $T^2 - W^2 - R^2 - 1 = 0$ nun ist die zeitartige Distanz ein hyperbolischer Winkel und die Tangentialebene eine pseudoeuklidische Ebene. Dementsprechend gilt

$$\frac{\sinh \alpha}{\sinh a} = \frac{\sinh \beta}{\sinh b} = \frac{\sinh \gamma}{\sinh c} .$$

Auf der Hyperkugel $T^2 + W^2 - R^2 - 1 = 0$ ist die zeitartige Distanz ein gewöhnlicher Winkel, und es gilt

$$\frac{\sinh \alpha}{\sin a} = \frac{\sinh \beta}{\sin b} = \frac{\sinh \gamma}{\sin c} .$$

Die Beweise finden sich in Anhang E.