

## Kapitel 9

# Die neun Geometrien der Ebene

Wir können jetzt die in den vorangegangenen Kapiteln besichtigten Geometrien der Ebene als Derivate der projektiven Geometrie darstellen. Wir erklären die Geometrien als Teil der projektiven Ebene. In der projektiven Ebene entsteht eine metrische Geometrie, wenn eine Polarität definiert ist. Genau dann können zu zwei Punkten zwei weitere Punkte und zu zwei Geraden zwei weitere Geraden konstruiert werden, und aus dem Doppelverhältnis von vier Punkten bzw. vier Geraden wird eine Funktion von zwei Punkten bzw. Geraden: Ausgangspunkt für Abstand und Winkel. Wir zeichnen also in einer (projektiven) Ebene, mit Punkten und Geraden. Beide können als Träger von Spiegelungen verstanden werden, weil durch die Polarität zu jeder Geraden ein Pol und zu jedem Punkt eine Polare gegeben ist und damit die Konstruktionen vom Typ der Abbildung 8.16 durchgeführt werden können.

Die Geometrien unterscheiden sich zunächst durch die Gestalt des absoluten Kegelschnitts. Er definiert zu jedem Punkt zwei (nicht notwendig reelle) Tangenten und zu jeder Geraden zwei (nicht notwendig reelle) Schnittpunkte. Damit bestimmen zwei Geraden eines Büschels ein Doppelverhältnis mit diesen Tangenten, ebenso wie zwei Punkte einer geraden Punktreihe ein Doppelverhältnis mit den Schnittpunkten bestimmen. Diese Doppelverhältnisse bleiben bei *allen* projektiven Transformationen unverändert. Da wir aber *nicht mehr alle* Transformationen durchführen, sondern den absoluten Kegelschnitt festhalten wollen, sind auf jeder Geraden zwei Punkte und in jedem Büschel zwei Strahlen ausgezeichnet. Aus dem Doppelverhältnis von vier Punkten oder Strahlen wird eine Funktion von nun noch zwei Punkten oder Strahlen. Diese ist ein Maß für Abstand und Winkel, das bei den eingeschränkten Transformationen fest bleibt: Wir sind in einer metrischen Geometrie, deren Bewegungen Längen und Winkel fest lassen, in der Längen und Winkel nicht mehr auf einzelne Objekte der Geometrie bezogen werden müssen, sondern eben auf den absoluten Kegelschnitt Bezug nehmen. – Metrische Geometrie ist der Teil der projektiven Geometrie, der zwei Figuren nur dann als kongruent ansieht, wenn nicht nur die projektiven Beziehungen der einzelnen Figurenelemente untereinander übereinstimmen, sondern auch ihre projektiven Beziehungen zu dem absoluten Kegelschnitt,

der die Polarität repräsentiert. Die projektiv durch diesen Kegelschnitt definierten Spiegelungen (Abb. 8.16) erfüllen die Axiome der metrischen Geometrie (Anhang D u. E).

Nun wollen wir die Polarität der verschiedenen Geometrien der Ebene auch dann mit reellen Konstruktionen bestimmen, wenn der absolute Kegelschnitt nicht reell ist oder imaginäre Elemente enthält. Wir greifen dabei zu einer dreidimensionalen Hilfskonstruktion. Dieser Trick erlaubt es, im Reellen zu konstruieren. Darüberhinaus erweitert er unsere Einsicht in die Einheit der Geometrien der Ebene.

Der nichtentartete Fall auf der Ebene kann in der dreidimensionalen Betrachtung durch ein nichtentartetes Ellipsoid oder Hyperboloid  $\mathcal{B}$  dargestellt werden (wir wählen eine Kugel). Die Existenz einer solchen *Quadrik* sichert, daß die Polarität auf der Ebene immer umkehrbar ist. Wir konstruieren die Polarität auf der Ebene wie folgt: Ist ein Punkt  $A$  auf der Ebene  $\alpha$  gegeben, bilden wir den Kegel seiner Tangenten an die Quadrik  $\mathcal{B}$ . Die Tangenten berühren die Quadrik in einem ebenen Kegelschnitt und bestimmen somit die (im dreidimensionalen) zum Aufpunkt  $A$  polare Ebene  $\pi[A]$ . Diese schneidet die Zeichenebene in einer Geraden, der Polaren  $p[A]$  (Abb. 9.1. Schon Abb. 8.18 geht so vor, nur wird die Ebene  $\alpha$  dort von einem Kegel und nicht von einer Kugel geschnitten). Ist umgekehrt eine Gerade  $g$  in der Ebene  $\alpha$  gegeben, so finden wir auf gleichem Wege für alle Punkte  $C$  der Geraden polare Ebenen  $\pi[C]$ . Da die Punkte  $C$  alle auf einer Geraden liegen, schneiden sich diese Ebenen wieder alle in einer Geraden<sup>1</sup>  $\pi[g]$ , die im Pol  $P[g]$  durch unsere Zeichenebene  $\alpha$  sticht (Abb. 9.2). Auf diese Weise haben wir eine reelle Konstruktion selbst für den Fall gefunden, daß der absolute Kegelschnitt keine reellen Punkte hat. – Schneidet die Quadrik  $\mathcal{B}$  die Zeichenebene in einem reellen absoluten Kegelschnitt, dann können wir natürlich alles auch sehr viel einfacher haben: Der Kegelschnitt ist ja reell, und die Polarität bedarf keiner Hilfskonstruktion. Schneidet die Quadrik aber nicht die Zeichenebene, ersetzt die reelle dreidimensionale Konstruktion die Diskussion imaginärer Elemente in der Ebene. Die Polarität wird über ein reelles Gebilde im Raum konstruiert, obwohl der absolute Kegelschnitt der Ebene  $\alpha$  nicht reell ist.

Wir zeichnen die Quadrik  $\mathcal{B}$  zunächst als Kugel im dreidimensionalen Raum. Schneidet die Kugel die Zeichenebene in einer nichtentarteten Kurve, erzeugt sie wie schon besprochen einen reellen absoluten Kegelschnitt (Abb. 9.3). Die Gebäude der Geometrie, die so dargestellt werden, müssen dabei nicht alle Punkte und nicht alle Geraden der projektiven Ebene enthalten. Das sehen wir wie folgt. Wenn wir von einem Punkt (oder einer Geraden) ausgehen, können wir alle möglichen Spiegelbil-

---

<sup>1</sup>Im *dreidimensionalen* projektiven Raum bildet die Polarität Punkte auf Ebenen und Ebenen auf Punkte ab. Wegen der Erhaltung der Inzidenz müssen dann Geraden auf Geraden abgebildet werden. Wenn eine Gerade  $g$  die Quadrik schneidet, schneiden sich die Tangentialebenen an den Schnittpunkten in der Polaren  $p[g]$ , die dann die Quadrik meidet. Schneidet  $g$  die Quadrik nicht, dann gibt es zwei Ebenen, die sowohl  $g$  enthalten als auch die Quadrik berühren. Die Verbindung der beiden Berührungspunkte ist dann die Polare  $p[g]$ . Die Polarität ist eine Involution auf der Menge der Geraden.

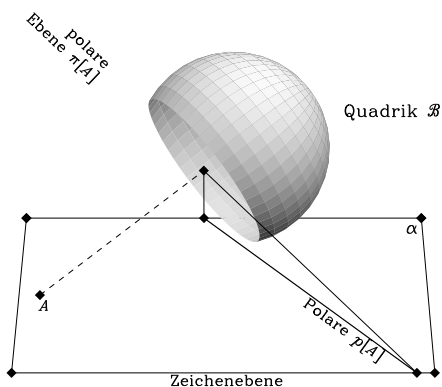


Abbildung 9.1: Elliptische Geometrie

Im wichtigsten nichttrivialen Fall schneidet die Hilfskugel die Ebene nicht. Der die Polarität vermittelnde Kegelschnitt ist also nicht reell. Dennoch gibt es zu einem Punkt  $A$  eine reelle Konstruktion der polaren Ebene  $\pi[A]$ , deren reeller Schnitt mit der Zeichenebene die Polare  $p[A]$  liefert. Umgekehrt erzeugen die Punkte  $Q$  auf einer Geraden  $g$  ein Büschel polarer Ebenen  $\pi[Q]$ , das von einer Geraden getragen wird. Diese durchstößt die Zeichenebene in einem Punkt, der nun der Pol  $P[g]$  der Geraden  $g$  sein muß.

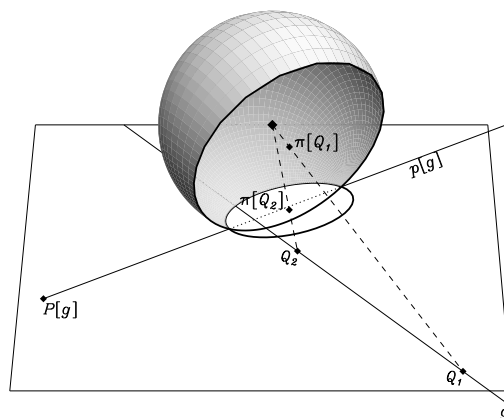


Abbildung 9.2: Der Pol einer Geraden. II.

Wir zeichnen die Kontaktkreise der Tangentenkegel zweier Punkte  $Q_1$  und  $Q_2$  einer Geraden  $g$  und bestimmen so die Polarebenen  $\pi[Q_1]$  und  $\pi[Q_2]$ . Diese Ebenen schneiden sich längs der (dreidimensionalen) Polaren  $p[g]$ . Diese wiederum schneidet die Zeichenebene im (zweidimensionalen) Pol  $P[g]$  der Geraden  $g$ .

der ins Auge fassen. Wir nennen dies das Transitivitätsgebiet der Spiegelungen bzw. Bewegungen. Dieses Transitivitätsgebiet muß nicht die gesamte projektive Ebene sein. Ein solches Zerfallen der projektiven Ebene in verschiedene Transitivitätsgebiete werden wir beobachten, wenn wir einen gegebenen Punkt nicht mehr in *jeden* anderen Punkt der projektiven Ebene und eine gegebene Gerade nicht mehr in *jede* andere der projektiven Ebene spiegeln können. Dies tritt gerade dann ein, wenn ein *reeller* nichtentarteter Kegelschnitt die Polarität bestimmt. Solch ein Kegelschnitt trennt die Punkte und die Geraden der Ebene in jeweils zwei Teilbereiche: Die Punkte können im Innen- oder im Außengebiet liegen, die Geraden können den Kegelschnitt (in reellen Punkten) schneiden oder meiden. – Hier zerfallen die Geraden der Ebene in zwei Transitivitätsgebiete: Die Geraden, die den absoluten Kegelschnitt schneiden, bilden ein solches Gebiet, die Geraden, die den Kegelschnitt nicht schneiden, bilden ein anderes. Im ersten Fall bilden auch die Punkte noch einmal zwei verschiedene Transitivitätsgebiete: Das erste wird von den Punkten gebildet, deren Polare den Kegelschnitt nicht schneidet, das zweite von den Punkten, deren Polare

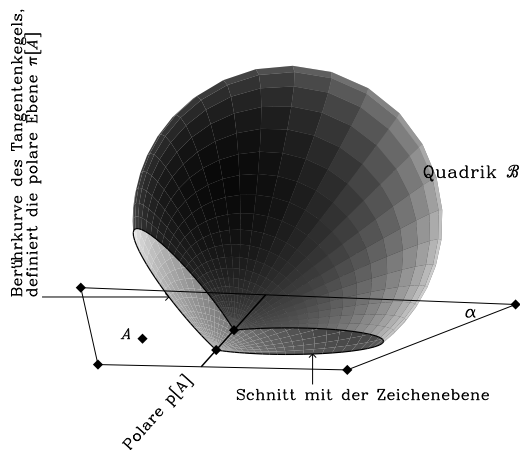


Abbildung 9.3: Der reelle Schnitt

Wir schauen von unten auf die Zeichenebene  $\alpha$ . Die Polarität in der Zeichenebene wird mittels einer reellen absoluten Kugel im Raum hergestellt. Der durch die Kugel herausgeschnittene Kreis ist der absolute Kegelschnitt der ebenen Polarität.

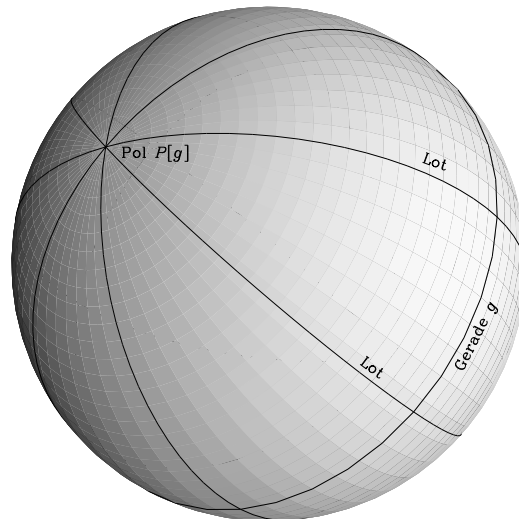


Abbildung 9.4: Pol und Polare auf der Kugel

Jeder Großkreis auf einer Kugel kann als Äquator aufgefaßt werden. Der zugehörige Pol trägt tatsächlich alle Lote auf dem Großkreis, die sich nun als Meridiane präsentieren.

den Kegelschnitt schneidet. Man kann zeigen, daß aus Spiegelungen eines Bereichs nie Spiegelungen eines anderen zusammengesetzt werden können. Insgesamt zerfällt die Bewegungsgruppe in drei verschiedene Untergruppen<sup>2</sup>.

Betrachten wir zuerst die Geraden, die den Kegelschnitt schneiden und die Punkte, deren Polaren das nicht tun. Das sind die Punkte im Innern des Kegelschnitts. Die Verbindung zweier solcher Punkte schneidet den absoluten Kegelschnitt immer in zwei Punkten. Ihr Pol liegt dagegen außerhalb des Definitionsbereichs der Geometrie. Dies ist die *hyperbolische Geometrie*, die erste anerkannte nichteuklidische Geometrie. Sie bleibt in dem Sinne lokal euklidisch, daß die gewöhnliche Dreiecksungleichung weiter gilt und alle Distanzen miteinander verglichen werden können. Im Großen finden wir dagegen viele Unterschiede zur euklidischen Geometrie, die alle mit der Aufgabe des Parallelenaxioms zusammenhängen. Die Krümmung ist negativ, die Winkelsumme im Dreieck ist kleiner als  $\pi$ . Der (hier negative) Exzeß der Winkelsumme ist der Dreiecksfläche proportional. Im Extremfall liegen die Ecken auf dem absoluten Kegelschnitt, wo die Winkel (dem induzierten Maße nach) alle verschwinden und die Winkelsumme auch. Der Pol einer Geraden liegt nicht im Innern des Kegelschnitts, also außerhalb der Geometrie. Nur in der Darstellung der Geometrie als Teil der projektiven Ebene erscheint er als reell konstruierbarer Punkt.

<sup>2</sup>Das bedeutet aber nicht, daß wir nicht auf der Zulassung der vollen Gruppe bestehen könnten. Der Punkt ist, daß die Zerlegung *möglich* ist.

Projizieren wir die Ebene so, daß der absolute Kegelschnitt ein Kreis wird, entsteht das Kleinsche Modell der nichteuklidischen Ebene. Der absolute Kegelschnitt ist das metrisch Unendliche.

Betrachten wir nun die Punkte, deren Polaren den Kegelschnitt schneiden, und die Geraden, die es auch tun. Wir befinden uns nun im Außengebiet des absoluten Kegelschnitts. Aus jedem Punkt  $A$  der Geometrie können wir zwei reelle Tangenten an den absoluten Kegelschnitt ziehen. Diese Tangenten teilen die Geraden des von  $A$  getragenen Büschels in diejenigen, die den Kegelschnitt schneiden, von den anderen. Es gibt keine Spiegelung der einen Geradenfamilie in die andere. Deshalb gibt es wieder zwei Fälle. Ernennen wir die Geraden, die den absoluten Kegelschnitt schneiden, zu zeitartigen Geraden, erhalten wir die *deSitter-Geometrie* (doppelt hyperbolische Geometrie, Abb. 7.21, 7.23 und 7.25). Nur die von den zeitartigen Geraden repräsentierten Spiegelungen gehören zum Erzeugendensystem der Bewegungen. Zwei Punkte können nun nicht mehr unbedingt durch zeitartige Geraden verbunden werden. Die geometrische Spiegelung an einer Geraden ist physikalisch die Spiegelung durch einen inertial bewegten Beobachter, dessen Weltlinie die spiegelnde Gerade ist. – Haben wir ein Dreieck aus paarweise verbindbaren Punkten, gilt die Pseudo-Dreiecksungleichung: Die Summe zweier Seiten ist kürzer als die dritte, wenn man die Orientierung beachtet, die jetzt definierbar wird. Die Krümmung ist negativ, Parallelen zu einer Geraden durch einen gegebenen Punkt kann man viele finden: Zu einer Geraden  $g$  gibt es durch jeden Punkt  $A$  mehrere Geraden  $h$ , die die Gerade  $g$  innerhalb der Geometrie nicht schneiden. Die Bemerkung zur Dreiecksungleichung kann ähnlich beschrieben werden: Zu einem Punkt  $A$  gibt es auf jeder Geraden  $g$  mehrere Punkte  $B$ , zu denen keine (zeitartige) Verbindung existiert. Dies sind raumartig zu  $A$  gelegene Punkte. Das ist eine merkwürdige, aber charakteristische Korrespondenz zwischen Parallelität und Gleichzeitigkeit. Sie ist Ausdruck der projektiven Dualität, d.h. der Vertauschbarkeit der Punkte mit den Geraden. Die deSitter-Geometrie heißt deshalb auch doppelt hyperbolisch. Der absolute Kegelschnitt liegt wie immer im metrisch Unendlichen.

Ernennen wir die Geraden, die den Kegelschnitt nicht schneiden, zu zeitartigen Geraden, finden wir die *Anti-Lobachevski-Geometrie* (Abb. 7.27). Jetzt sind die raumartigen Geraden der deSitter-Geometrie zu zeitartigen Weltlinien erklärt. Wieder sind nicht alle Punktpaare miteinander verbindbar. Wieder gilt in Dreiecken aus paarweise verbindbaren Punkten die Pseudo-Dreiecksungleichung, aber die Krümmung ist jetzt positiv. Zwei (zeitartige) Geraden schneiden sich immer im metrisch Endlichen der Geometrie, es gibt keine Parallelen.

Schneidet die dreidimensionale nichtentartete Quadrik die Zeichenebene  $\alpha$  nicht, gewinnen wir eine Zuordnung, in der kein Punkt auf seiner Polaren liegen kann. Es entsteht die *elliptische Geometrie*, die das projektive Bild der sphärischen Geometrie ist (Abb. 9.1). Wir haben sie schon mehrfach diskutiert. Alle Geraden (Großkreise) haben *zwei* Pole auf der Kugel (so wie zum Äquator und Nord- und Südpol gehören), die aber in der Ebene auf *einen* Punkt abgebildet werden. Gegenüberliegende Punkte auf der Kugel müssen gleichgesetzt werden, denn sie liegen auf dem

gleichen Strahl durch den Mittelpunkt und werden deshalb auf den gleichen Punkt der Ebene abgebildet. Jeder Punkt  $A$  der Ebene ist Pol  $A = P[g]$  einer individuellen Geraden  $g$ , seiner Polare  $g = p[A]$ . Das Büschel der Lote zu dieser Geraden  $g$  trifft sich im Pol  $P[g] = A$  und entspricht dem Meridianbüschel zum gegebenen Äquator (Abb. 9.4). *Parallelen* gibt es in der elliptischen Geometrie nicht, weil es keine (echte, invariante, geometrisch ausgezeichnete) Ferngerade gibt. Dreiecke gibt es natürlich, Kreise ebenfalls, wenn sie in der ebenen Projektion auch anders aussehen, aus als wir es gewöhnt sind, aber keine Ferngerade. Es gibt auch keine reelle Gerade  $g$ , die ihren eigenen Pol enthält. Das ist Ausdruck der Tatsache, daß der absolute Kegelschnitt die Ebene in reellen Punkten nicht schneidet. Die elliptische Geometrie ist weiter lokal euklidisch: Es gilt die gewöhnliche Dreiecksungleichung, alle Distanzen sind miteinander vergleichbar. Zwei Punkte können immer ineinander gespiegelt werden: Es gibt keine unterschiedenen Gebiete mehr wie Fall der hyperbolischen Geometrie. Alle Geraden müssen als Spiegel zugelassen werden, damit die Spiegelungen eine Bewegungsgruppe erzeugen. – Die Winkelsumme im Dreieck ist größer als  $\pi$ , was eine positive Krümmung kennzeichnet. Das ist kein Wunder, weil wir die unmittelbare Verwandtschaft zur Kugelgeometrie bereits kennen. Das bereits in Abbildung 7.1 zu sehende Polardreieck ist ein Beispiel für die Winkelsumme  $3\pi/2$ . Der Exzeß (hier  $\pi/2$ ) ist der Dreiecksfläche proportional.

In unserer Diskussion der metrisch-projektiven Geometrien entsteht ein Sonderfall, wenn unsere Hilfskugel  $\mathcal{B}$  die Zeichenebene  $\alpha$  nur im Punkte  $P$  berührt (Abb. 9.5). Dann gehen alle Polaren  $p[A]$  durch diesen Punkt  $P$ . Alle Geraden  $g$  haben nur einen Pol, eben  $P$ . Wir nennen ihn den *absoluten Pol*. Dies ist die *antieuklidische Geometrie*. Metrische Distanz muß sich nun immer auf diesen Punkt beziehen. Es gibt also Kurven der Länge Null: Das sind die Geraden durch den absoluten Pol. In einem Dreieck gibt es – wie in der Galilei-Geometrie – immer eine Seite, deren Länge die Summe der beiden anderen Längen ist. Die Krümmung ist hier aber positiv. Die *zweidimensionale* antieuklidische Geometrie ist bereits entartet, obwohl die *dreidimensionale* absolute Kugel (in unserer Darstellung) selbst nicht entartet ist, nur eben ihre Lage zur Zeichenebene.

Es ist ersichtlich ohne Belang, daß wir die Quadrik  $\mathcal{B}$  als Kugel gewählt haben. Bis hierher könnte sie auch ein Hyperboloid sein, selbst wenn dieses zu einem Doppelkegel entartet. Die Resultate sind die gleichen. Sie hängen nur davon ab, ob die Ebene geschnitten, berührt oder gemieden wird. Der Schnitt ist selbstredend ein Kegelschnitt. Ist er nicht entartet, haben wir wieder die Dreiergruppe Lobachevski-Geometrie, Anti-Lobachevski-Geometrie und doppelhyperbolische Geometrie vor uns (Abb. 8.18). Der Doppelkegel enthält aber noch zwei weitere Möglichkeiten des Kontakts mit der Ebene: Seine Spitze kann Punkt der Ebene sein. Schneidet er die Ebene nur in diesem einen Punkt, ergibt das wieder die eben besprochene antieuklidische Geometrie, die sich auch sonst allgemein bei Berührung des Kegelschnitts durch die Zeichenebene findet. Schneidet er sie in einem Paar aus Mantellinien (Abb. 9.6), ist wieder der Schnittpunkt des Paares der absolute Pol für alle Geraden der Ebene. Die Polaren zu den einzelnen Punkten gehen alle durch diesen Pol. Für die Punkte

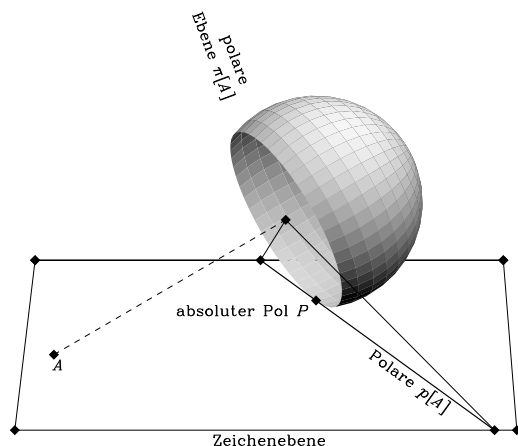


Abbildung 9.5: Antieuklidische Geometrie

Wird die Zeichenebene von der absoluten Kugel gerade berührt, enthalten die Tangentialkegel aller Punkte die Verbindungsgerade zu diesem Berührungspunkt, durch den deshalb alle polaren Ebenen und alle Polaren gehen. Er ist somit auch der Pol aller Geraden der Ebene, ein absoluter Pol  $P$ . Verbindungslinien  $AP$  und Polaren  $p[A]$  bestimmen eine Involution in dem von  $P$  getragenen Strahlbüschel, die keine reellen Fixstrahlen hat.

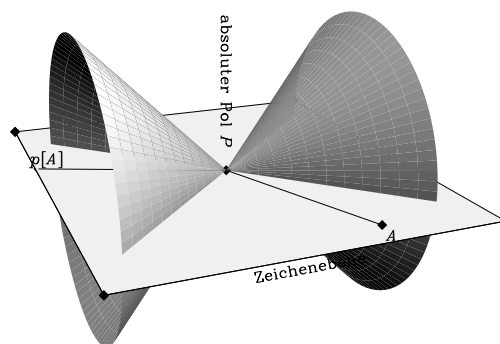


Abbildung 9.6: Anti-Minkowski-Geometrie

Wir ersetzen die absolute Kugel durch ein Hyperboloid, das wir zu einem Doppelkegel entarten lassen. Seine Spitze soll in der Zeichenebene liegen und wieder einen absoluten Pol  $P$  bilden. Die Punkte  $A$  haben verschiedene Polaren, die alle durch  $P$  gehen. Sie ergeben sich aus der Verbindungsgeraden  $AP$  als vierte harmonische Gerade zu den beiden Mantellinien, in denen der absolute Kegel die Ebene schneidet. Diese Mantellinien sind die Fixstrahlen der Involution zwischen  $AP$  und  $p[A]$ . Das Ergebnis ist dual zur Minkowski-Geometrie und heißt deshalb Anti-Minkowski-Geometrie.

auf den Schnittgeraden allerdings ist die Schnittgerade selbst die Polare. Es gibt also wieder Punkte, die auf ihrer eigenen Polaren liegen. Dieser Fall ist dual zur Minkowski-Geometrie und heißt *Anti-Minkowski-Geometrie*. Wieder gibt es Kurven der Länge Null: die Geraden durch den Pol. – Berührt der Doppelkegel die Ebene längs *einer* Mantellinie, finden wir die Galilei-Geometrie, die wir gleich noch in einem anderen Zusammenhang sehen.

Die noch verbleibenden drei Geometrien sind die, in denen das Parallelenaxiom gilt und die Ferngerade  $p$  die Rolle des absoluten Kegelschnitts übernimmt. Parallele Geraden schneiden sich dort, also auch die Lote einer gegebenen Geraden  $g$ . Dieser Schnittpunkt der Lote ist der Pol  $P[g]$  der Geraden  $g$ . Alle Pole liegen auf  $p$ . Die Ferngerade  $p$  ist eine absolute Polare für alle Punkte der Ebene (die nicht auf ihr selbst liegen), und Orthogonalität wird durch eine Involution auf eben dieser

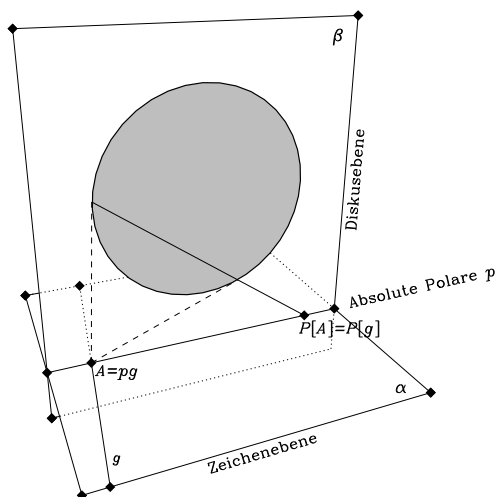


Abbildung 9.7: Euklidische Geometrie

Wir untersuchen den Fall, daß die absolute Kugel zum Diskus entartet. Die Ebene des Diskus kann als absolute polare Ebene angesehen werden, deren Schnitt mit der Zeichenebene die Ferngerade definiert. Diese wird jetzt Polare zu jedem nicht koinzidierenden Punkt der Ebene. Die Pole aller anderen Geraden liegen auf dieser absoluten Polaren.

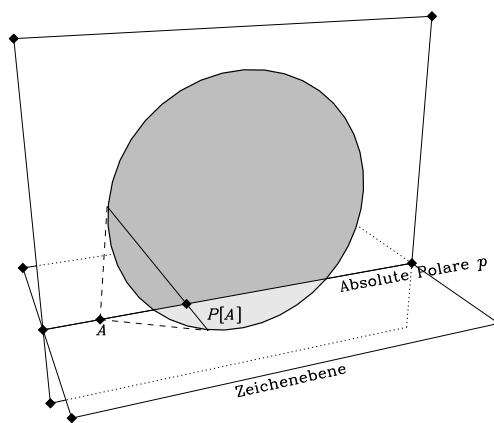


Abbildung 9.8: Minkowski-Geometrie

Schneidet der Diskus die Zeichenebene, entstehen auf der Ferngeraden zwei Fixpunkte. Die Involution zwischen den Schnittpunkten  $A = pg$  und den Polen  $P[A] = P[g]$  zeigt das Muster der Minkowski-Geometrie.

Ferngerade entschieden. Die Ferngerade mit den beiden reellen oder imaginären Fixpunkten dieser Involution ist ein Entartungsfall eines Kegelschnitts unbeschränkter Exzentrizität aufgefaßt werden. – Um diese Geometrien zu konstruieren, stellen wir uns also vor, die absolute Kugel flacht ab und gerät am Ende zu einem Diskus. Die Diskusebene  $\beta$  schneidet die Zeichenebene  $\alpha$  in einer Geraden  $p$ . Wir finden nun, daß der Tangentenkegel jedes Punktes  $A$  der Zeichenebene, der nicht auf  $p$  liegt, den Diskus an seinem Rand berührt. Die polare Ebene  $\pi[A]$  ist also immer gleich  $\beta$  und alle Polaren  $p[A]$  fallen mit der Geraden  $p$  zusammen. Folglich nennen wir  $p$  eine absolute Polare. Was stellen wir für die Punkte  $A$  auf der absoluten Polaren  $p$  fest? Ihr Tangentenkegel entartet zu einem Sektor der Ebene  $\beta$ , der den Diskus in zwei Punkten berührt. Die Verbindungsgerade schneidet die absolute Polare in einem anderen Punkt  $P[A]$ . Wenn der Punkt  $A$  der Schnitt  $pg$  zwischen einer Geraden  $g$  mit der Ferngeraden  $p$  ist, erhalten wir mit  $P[A] = P[g]$  eine involutorische Abbildung  $P[A]$  der Punkte  $A$  der Ferngeraden aufeinander. Das polare Gebilde zu einem Punkt  $A$  auf  $p$  ist also keine Gerade, sondern wieder ein Punkt  $P[A]$ , genauer das Geradenbüschel, das von ihm getragen wird. Wir erhalten also die Geometrien mit Parallelenaxiom und einer Orthogonalität, die als Involution auf der *absoluten Polaren* bestimmt werden kann.



Schneidet der Diskus die Ebene nicht, finden wir die *euklidische Geometrie* (Abb. 9.7): Alle Pole liegen auf der absoluten Polaren, die Orthogonalität wird durch eine Involution auf der Ferngeraden *ohne* reellen Fixpunkt bestimmt. Mit Hilfe des Diskus können wir die aber immer noch mit einer einfachen reellen Konstruktion finden. Hier entsteht das projektive Bild der euklidischen Geometrie. Die Bahnkurven der Drehungen (Kreise) schneiden die Ferngerade nicht im Reellen. Der absolute Kegelschnitt ist nicht mehr reell und darüberhinaus entartet. Er enthält nur noch zwei wesentliche Punkte, die imaginären Kreispunkte. Jeder Kreis geht durch diese beiden imaginären Punkte, die auf der Ferngeraden liegen. Man sieht sie nicht in der Ebene, aber ihre Existenz ist implizit in der Aussage enthalten, daß ein Kreis durch drei Peripheriepunkte bestimmt ist. Projektiv interpretiert, ist ein Kreis ja nur ein spezieller Kegelschnitt. Ein allgemeiner Kegelschnitt ist jedoch durch fünf Punkte bestimmt. Die Charakterisierung eines Kegelschnitts als Kreis schließt deshalb die universelle Vorgabe dieser zwei Peripheriepunkte ein.

Schneidet der Diskus die Ebene in zwei reellen Punkten, entsteht die *Minkowski-Geometrie* (pseudoeuklidische Geometrie, Abb. 9.8): Wieder liegen alle Pole auf der absoluten Polaren, die Orthogonalität wird nun aber durch eine Involution mit reellen Fixpunkten auf der Ferngeraden bestimmt. Dies sind die beiden absoluten Kreispunkte, durch die jeder Kreis geht. Die zwei Kreispunkte, die in der euklidischen Geometrie nicht reell sein können, fallen hier also sofort ins Auge: Es sind die beiden Asymptotenrichtungen. Die Asymptoten der Kreise sind Geraden mit den beiden *lichtartigen* Richtungen, zwei Strahlbüschel also, die von zwei Punkten auf der Ferngeraden getragen werden. Durch diese beiden reellen Punkte geht jeder Kreis der Minkowski-Geometrie. Beiden Geometrien ist gemeinsam, daß alle eigentlichen Punkte die gleiche universelle Polare haben: die Ferngerade. Dies ist Zeichen einer Entartung, die im allgemeinen Fall so nicht beobachtet wird. Die Geraden haben zwar verschiedene Pole, diese füllen aber nicht die Ebene, sondern liegen alle auf der universellen Polaren. Projizieren wir diese auf die Ferngerade, wird das Lotenbüschel einer Geraden ein Parallelenbüschel. Das Parallelenaxiom und die eben besprochenen Entartung hängen also unmittelbar zusammen. Ohne die Entartung der Polarität ist die Gültigkeit des Parallelenaxioms nicht zu haben.

Berührt der Diskus die Ebene nur in einem Punkt (oder berührt ein Doppelkegel die Ebene entlang einer Mantellinie), hat die Rechtwinkelinvolution nun genau *einen* Fixpunkt (der genau genommen ein Doppelpunkt ist, weil in ihm die beiden Fixpunkte der nichtentarteten Involutionen zusammenfallen). In diesem Doppelpunkt berühren die Kreise die Ferngerade. Wir finden eine projektive Darstellung der *Galilei-Geometrie*. Es ist die dritte und letzte der Geometrien, die das Parallelenaxiom erfüllen, mit dem der Satz von der Gleichheit der Stufenwinkel gilt, aus dem abgeleitet werden kann, daß die Winkelsumme im Dreieck einen gestreckten Winkel ergibt. Alle drei Geometrien kennen also keine Krümmung. Suchen wir einen nichtentarteten Fall, müssen wir Krümmung zulassen. Die Galilei-Geometrie ist eben auch der krümmungsfreie Sonderfall zwischen antieuklidischer Geometrie und Anti-Minkowski-Geometrie, Die dort noch nichtentartete Involution im Pola-

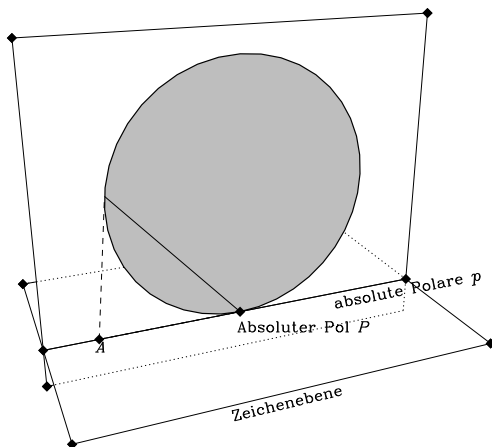


Abbildung 9.9: Galilei-Geometrie

Wir lassen schließlich den Diskus die Zeichenebene nur berühren. Nun haben wir nicht nur eine absolute Polare  $p$  für alle Punkte, wir haben auch einen absoluten Pol für alle Geraden. Dies ist die extrem entartete Geometrie der Ebene, die Galilei-Geometrie.

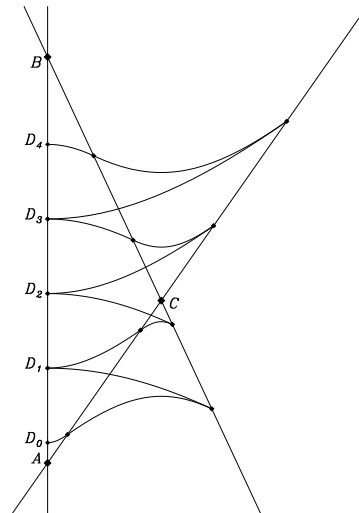


Abbildung 9.10: Der Längentransport in Strahlbüscheln

Hier sehen wir die Prozedur, die dual zum Paralleltransport von Richtungen (Abb. 7.1) ist. Wir zeichnen ein Dreieck in der Minkowski-Ebene analog Abb. 5.13. Beginnen wir mit dem Punkt  $D_0$ . Sein Abstand von  $A$  wird nach  $AC$  übertragen. Danach wird der Abstand zu  $C$  nach  $CB$  und schließlich der Abstand zu  $B$  wieder nach  $AB$  übertragen. Wir erhalten  $D_1$ . Die konsekutive Übertragung erzeugt also eine Verschiebung von  $D_0$  nach  $D_1$ , die wiederholt werden kann, also für alle Punkte auf  $AB$  die gleiche ist. Der Betrag der Translation ist  $d[D_0, D_1] = d[A, B] - d[A, C] - d[C, B]$ .

renbüschel entartet hier.

Die neun Strukturen, die Punkte und Geraden der Ebene bilden können, fassen wir in der Tabelle 9.1 der ebenen Geometrien zusammen. Die Relation zwischen den Geraden  $g$  und den nicht auf ihr liegenden Punkten  $Q$  spielt eine charakteristische Rolle. In den Geometrien der ersten Spalte finden sich diejenigen, in denen es durch keinen Punkt  $Q$  außerhalb einer Geraden  $g$  Parallelen zu dieser Geraden gibt. Der Außenwinkel an einem Dreieck ist immer kleiner als die Summe der gegenüberliegenden Innenwinkel, die Winkelsumme im Dreieck immer größer als  $\pi$ . Die Krümmung ist also positiv. In den Geometrien der zweiten Spalte gilt das Parallelenaxiom. Es gibt durch jeden Punkt  $Q$  außerhalb einer Geraden  $g$  immer genau eine Parallele  $h$ , die  $g$  im (metrisch) Endlichen nicht schneidet. Der Außenwinkel an einem Dreieck ist gleich der Summen der gegenüberliegenden Innenwinkel. Die Krümmung ist Null.

In den Geometrien der dritten Spalte gibt es durch jeden Punkt  $Q$  außerhalb einer Geraden  $g$  zu dieser viele Parallelen. Der Außenwinkel an einem Dreieck ist immer größer als die Summe der gegenüberliegenden Innenwinkel. Die Krümmung ist negativ. – In den Geometrien der ersten Zeile hat ein Punkt  $Q$  außerhalb einer Geraden  $g$  von jedem ihrer Punkte einen reellen positiven Abstand. Es gilt die gewohnte Dreiecksungleichung, die Summe zweier Seiten ist immer größer als die dritte. In den Geometrien der zweiten Zeile hat ein Punkt  $Q$  von *genau einem* Punkt einer Geraden  $g$  den Abstand Null. Es gilt eine Dreiecks*gleichung*, d.h., es gibt in jedem Dreieck eine Seite, die gleich der Summe der beiden anderen ist. In den Geometrien der dritten Zeile hat ein Punkt  $Q$  von *mehr als einem* Punkt einer Geraden  $g$  den Abstand Null. Es gilt die pseudoeuklidische Dreiecksungleichung, d.h., es gibt in jedem Dreieck eine Seite, die größer als die Summe der beiden anderen ist. Die projektive Dualität zwischen Punkten und Geraden bestimmt eine Symmetrie in dieser Tabelle, die durch die Verwendung der Vorsilbe *anti* sichtbar wird<sup>3</sup>.

Die Tabelle zeigt, wie die Klassifikation nach der Krümmung dual zu der nach der Dreiecksungleichung ist. Wir haben bereits gesehen, daß beide Klassifikationen durch die Eigenschaften der Paare aus Gerade  $g$  und Punkt  $A$  charakterisiert werden können, zum einen durch die Anzahl der Geraden durch  $A$ , die  $g$  nicht schneiden, und zum anderen durch die Anzahl der Punkte auf  $g$ , die von  $A$  keinen positiven reellen Abstand haben. Wir ergänzen diese Überlegung durch einen Hinweis auf die duale Konstruktion zur Rotation der Tangentialebenen auf einer gekrümmten Fläche, wie wir sie in Abbildung 7.1 kennengelernt haben. Das Dreieck mit den drei Verbindungsseiten wird nun als Dreiseit mit drei Schnittpunkten aufgefaßt, und die auf den Seiten zu verschiebende Richtung als in den Ecken zu drehende Distanz. Dual zur Rotation der Richtungen ist nun die Translation der Strecken. Abbildung 9.10 zeigt, wie das in der Minkowski-Ebene aussieht. Die Verschiebung ist gleich dem Exzeß der Länge der einen Seite gegen die Summe der beiden anderen.

Wir wollen uns nun noch einige Details ansehen. Zuerst sollten wir uns der Konsistenz versichern, indem wir den Mittelsenkrechtensatz oder wenigsten den Höhensatz ansehen. Wir tun dies für einen generischen Fall, die deSitter-Welt. Abbildung 9.11 zeigt die notwendigen Konstruktionen für den Höhensatz, Abbildung 9.12 für den Mittelsenkrechtensatz. Merkwürdigerweise hat nun jede Strecke im projektiven Modell nicht nur einen eigentlichen, sondern auch einen uneigentlichen Mittelpunkt, der allerdings nicht mehr im Transitivitätsgebiet der Geometrie liegt. Dementsprechend gibt es auch drei uneigentliche Schnittpunkte und drei uneigentliche Umkreise, die durch das metrisch Unendliche gehen (dual dazu ist die bekannte Existenz dreier Ankreise neben dem Inkreis eines Dreiecks). In den Geometrien mit Parallelenaxiom entarten diese drei uneigentlichen Kreise. Die nichtklassischen Mittelsenkrechten fallen dort alle mit der Ferngerade zusammen. Wir nennen die drei zusätzlichen Kreise hier uneigentlich, weil sie nur noch Bahnkurven von Drehungen sind, nicht aber Orte

---

<sup>3</sup>Die Bezeichnung Anti-deSitter-Welt fällt nicht darunter. Sie stammt aus der Kosmologie und meint den Bedeutungswechsel zwischen zeitartigen und raumartigen Geraden.

Tabelle 9.1: Die neun Geometrien der Ebene

	Krümmung positiv	Krümmung Null	Krümmung negativ
	keine Parallelen	eine Parallelen	viele Parallelen
	Außenwinkel kleiner Summe der gegenüberliegenden Innenwinkel	Außenwinkel gleich Summe der gegenüberliegenden Innenwinkel	Außenwinkel größer Summe der gegenüberliegenden Innenwinkel
	Pole haben keine reelle Tangente	Pole haben eine Tangente (die absolute Polare)	Pole haben zwei reelle Tangenten
kein Abstand Null euklidische Dreiecksungleichung Polaren schneiden abs.Kegels.nicht	elliptische G.  (Kugel)	euklidische G.  (Tafel)	hyperbolische G. Lobachevski-G.  (Geschwindigkeits- raum)
ein Abstand Null Dreiecksgleichung Polaren schneiden abs.Kegels. im absoluten Pol	Antieuklidische G.	Galilei-Geometrie  (Newtonsche Mechanik)	Anti-Minkowskische G.
viele Abstände Null pseudoeuklidische Dreiecksungleichung Polaren schneiden abs.Kegels. in 2 Punkten	Anti-Lobachevski-G.  (Anti- deSitter- Welt)	Minkowski-Welt  (Einsteinsche Mechanik)	doppelhyperbol.G.  (deSitter-Welt)

gleichen endlichen Abstands von einem Mittelpunkt.

In euklidischer und Minkowski-Geometrie gilt der Peripheriewinkelsatz: Der geometrische Ort aller Punkte  $C$ , die mit einer gegebenen Strecke  $AB$  ein Dreieck bilden, dessen Winkel  $\angle ACB$  am Punkte  $C$  einen festen Werte hat, ist ein Kreis. Dieser Satz kann nur gelten, wenn der Außenwinkel an einem Dreieck gleich der Summe der gegenüberliegenden Innenwinkel ist, die Krümmung also verschwindet. Wir haben bereits gesehen (Abb. 6.8), wie sich das in der Galilei-Geometrie verändert. Für den

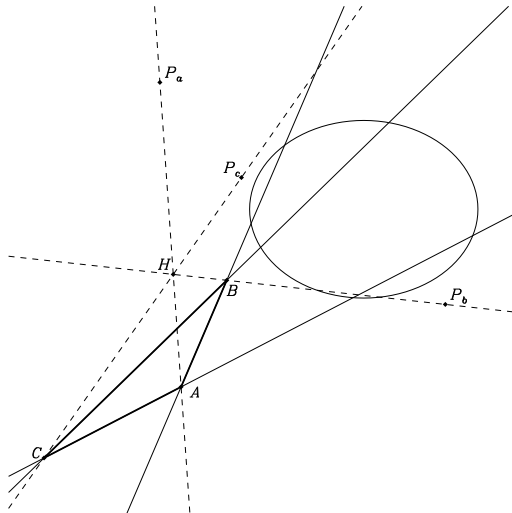


Abbildung 9.11: Der Höhensatz. I.

Um alle Konstruktionselemente reell zu finden, zeichnen wir in der deSitter-Geometrie das Dreieck  $ABC$  mit seinen Seiten  $c = AB$ ,  $a = BC$  und  $b = CA$ , deren Polen  $P_c$ ,  $P_a$ ,  $P_b$  und den Lote  $CP_c$ ,  $AP_a$ ,  $BP_b$ , die sich in einem Punkt  $H$  schneiden. Der Beweis wird im Anhang A, Abb. A.7 algebraisch geführt.

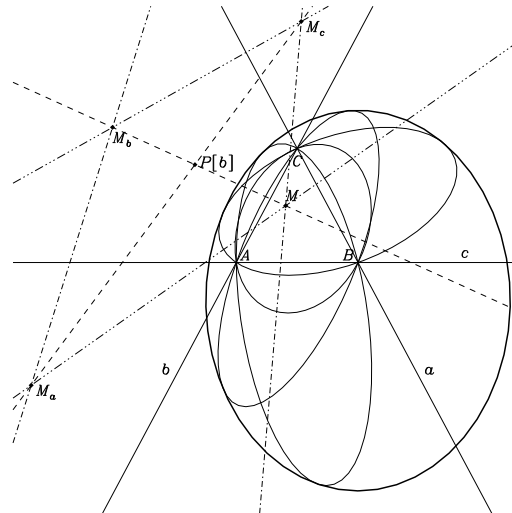


Abbildung 9.12: Der Mittelsenkrechten-satz. I.

Dargestellt ist ein Dreieck  $ABC$  in einer Lobachevski-Geometrie. Die gestrichelten Linien sind die Mittelsenkrechten auf der Seite  $b = CA$ , die sich im Pol  $P[b]$  schneiden. Die Mittelsenkrechten (eigentliche und uneigentliche) auf  $c$  sind strichpunktirt, die auf  $a$  mit drei Punkten gestrichelt. Die Pole von  $a$  und  $c$  liegen außerhalb der Zeichnung. Neben dem erwarteten Umkreismittelpunkt  $M$  gibt es noch drei andere Schnittpunkte, jeweils mit den uneigentlichen Mittelsenkrechten, um die sich (uneigentliche) Umkreise legen lassen.

generischen Fall nicht verschwindender Krümmung ist dieser geometrische Ort eine Kurve vierten Grades (Abb. 9.13). Da der Beweis der Eigenschaft des Feuerbach-Kreises, durch die neun bekannten Punkte zu gehen, mit dem Peripheriewinkelsatz geführt wird, geht dann auch dessen Existenz verloren.

Wir wollen uns noch einmal die Kegelschnitte ansehen, die dem Feuerbach-Kreis entsprechen. In jeder der besprochenen Geometrien bestimmt ein Dreieck  $\Delta A_1 A_2 A_3$  einen Höhenschnittpunkt  $A_4$  derart, daß jeder der vier Punkte  $A_k$  der Höhenschnittpunkt für das Dreieck der drei anderen ist. Die vier Punkte bilden ein vollständiges Viereck, dessen sechs Seiten die Seiten der wählbaren Dreiecke und deren Höhen sind. Die drei Diagonalpunkte sind in jedem Falle die Höhenfußpunkte  $F_{12}$ ,  $F_{23}$  und  $F_{31}$ . Betrachten wir nun eins der vier Dreiecke genauer. Jede Seite hat nun zwei Mittelpunkte wie in Abbildung 9.12. Es gilt: Ein Kegelschnitt, der durch die drei Höhenfußpunkte und zwei Mittelpunkte auf verschiedenen Seiten bestimmt ist, geht

Wir sehen das Beispiel einer Kurve, deren jeder Punkt den gleichen Winkel mit Schenkeln durch die festen Punkte  $A$  und  $B$  trägt. Die Größe dieses Winkel kann etwa durch Vorgabe eines dritten Punktes  $C$  auf dieser Kurve bestimmt werden. Es ist im allgemeinen immer nur eine Sehne, für die diese Kurve die Peripheriewinkelgleichheit erfüllt.

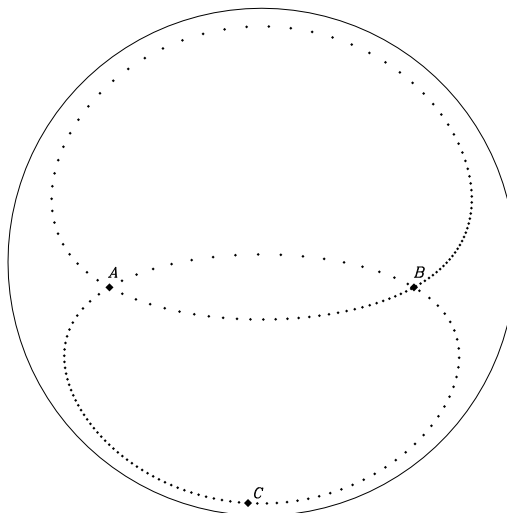


Abbildung 9.13: Der Kreis zweiter Art

auch durch einen Mittelpunkt der dritten Seite. Das kann etwa mit den Mitteln der Anhänge C und D auch gezeigt werden. Im allgemeinen erhalten wir also für jedes der vier Dreiecke vier solche Kegelschnitte. Es aber keinen Feuerbach-Kreis. Statt dessen schneidet die Verbindung zweier Mittelpunkte auf verschiedenen Seiten einen Mittelpunkt auf der dritten. Die 6 Mittelpunkte sind Ecken eines vollständigen Vierseits. Was wir als Feuerbach-Kreis der euklidischen Geometrie kennenlernen, zerfällt in einer allgemeinen Geometrie in 16 Kegelschnitte. In Geometrien mit einer absoluten Polaren haben alle vier Dreiecke einen dieser Kegelschnitte gemeinsam. Dies ist der 11-Punkte-Kegelschnitt der Abbildung 8.12. In Geometrien mit absolutem Pol ist einer der vier Punkte immer der Pol selbst, und es bleibt nur ein eigentliches Dreieck mit vier Kegelschnitten der betrachteten Art. Die Abbildungen 9.14 und 9.15 zeigen den Fall der antieuklidischen Geometrie.

Wir untersuchen nun die Bahnkurven von Drehungen. Eine Drehung um ein Zentrum  $Q$  entsteht, wenn an zwei Geraden durch  $Q$  nacheinander gespiegelt wird. Ein Punkt  $R$  behält dann seinen Abstand von  $Q$ , bleibt also auf dem Kreis um  $Q$ , auf dem er vor der Drehung gelegen hat. Der Drehungsgrad wird durch den Winkel bestimmt, den die beiden spiegelnden Geraden miteinander bilden. Bei einer Drehung bewegen sich die Punkte auf Kreisen um das Drehzentrum  $Q$  (Abb. 6.3, 6.4). Wenn wir im folgenden die Bahnkurven einer Drehung zeichnen, erhalten wir ein Bild dieser Kreise. Dies wollen wir uns zum Abschluß des Kapitels ansehen. Der nichtentartete und reelle Fall ist die deSitter-Geometrie (Abb. 9.16). Gedreht wird um einen Punkt  $Q$  außerhalb des absoluten Kegelschnitts  $\mathcal{K}$ . Die Tangenten aus  $Q$  an diesen Kegelschnitt trennen zeitartige von raumartigen Geraden. Die Bahn einer Drehung, die zeitartige Geraden nur wieder in zeitartige bewegen kann, kann diese Tangenten also nicht schneiden. Drehungen lassen darüber hinaus den absoluten Kegelschnitt  $\mathcal{A}$ , das Zentrum  $Q$  und seine Polare fest. Mehr noch, alle Kreise gehen durch die

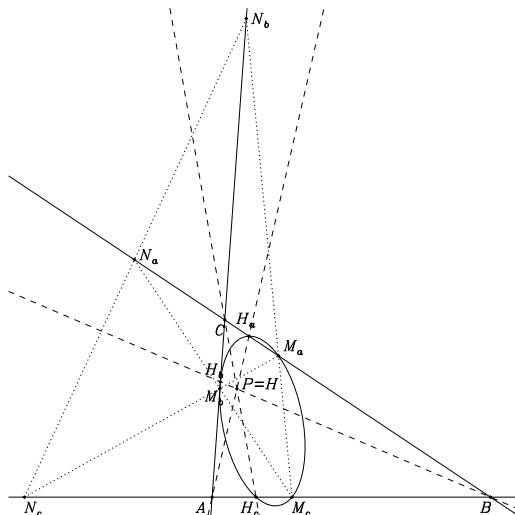


Abbildung 9.14: Ein Feuerbachscher Kegelschnitt in der antieuklidischen Geometrie

In der antieuklidischen Geometrie existiert ein absoluter Pol. Alle Lote gehen durch diesen Punkt, der automatisch zum Höhenmittelpunkt  $H$  aller Dreiecke wird.

Jede Strecke wird durch ein Punktepaar in harmonischer Lage halbiert, dessen Verbindungen zum absoluten Pol hier einen nach euklidischer Bewertung rechten Winkel einschließen. Wir erhalten 6 Mittelpunkte. Ein Kegelschnitt durch die drei Höhenfußpunkte und zwei Mittelpunkte zweier Seiten geht auch durch einen Mittelpunkt der dritten Seite. Die Höhenmitten bleiben unbestimmt, weil die Höhen den absoluten Pol passieren (vgl. Abb. 8.12).

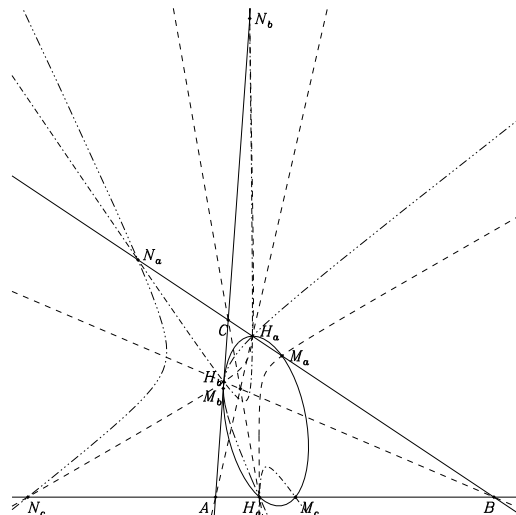


Abbildung 9.15: Alle vier Feuerbachschen Kegelschnitte

Dies ist wieder die Konfiguration der vorigen Abbildung. Die Hilfslinien sind weggelassen und dafür die übrigen drei Kegelschnitte, alles Hyperbeln, hinzugefügt. Neben dem Kegelschnitt durch die Punkte  $[H_a, H_b, H_c, M_a, M_b, M_c]$  (durchgezogene Linie) sind die Kegelschnitte durch  $[H_a, H_b, H_c, M_a, N_b, N_c]$  (gestrichelte Linie), durch  $[H_a, H_b, H_c, N_a, M_b, N_c]$  (strichtripelpunktierte Linie) und durch  $[H_a, H_b, H_c, N_a, N_b, M_c]$  (strichpunktiierte Linie) gezeichnet.

Berührungspunkte  $B[k[Q]]$  der Tangenten und haben dort die Richtung der Tangenten. Es sind also Kegelschnitte mit vier Bestimmungsstücken: eine einparametrische Schar, wie zu erwarten. Wir könnten mit der Konstruktion C.6 ( $AB = k_1[Q]$ ,  $DE = k_2[Q]$ ,  $QC = \text{Radius}$ ) den Kegelschnitt punktweise erzeugen. Kein Punkt kann bei einer Bewegung die unveränderten Gebilde  $\mathcal{K}$ ,  $p[Q]$ ,  $k_1[Q]$  und  $k_2[Q]$  überschreiten. Es gibt keine geschlossenen Bahnkurven. Alle Drehungen sind eigentlich nur Verschiebungen längs der Bahnkurven aus Richtung des einen Berührungspunkts in Richtung des anderen. Die Bahnkurven im Innern des Kegelschnitts liegen außerhalb der deSitter-Geometrie und können als Kreise mit imaginärem Radius angesehen werden. – Legen wir nun den Drehpunkt ins Innere des absoluten Kegelschnitts (Abb. 9.17), so sind

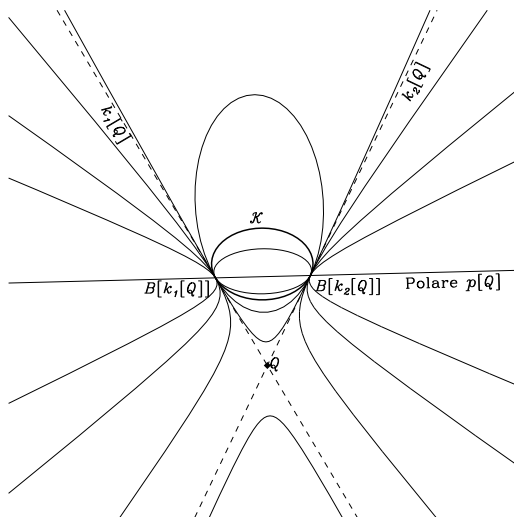


Abbildung 9.16: Drehungen in der DeSitter-Geometrie

Drehungen um einen Punkt  $Q$  werden durch die Strahlen des von ihm getragenen Büschels erzeugt. Sie lassen den absoluten Kegelschnitt  $\mathcal{K}$ , die Tangenten  $k[Q]$  an ihn und ihre Berührungspunkte  $B[k[Q]]$  fest. Der Punkt  $Q$  und die beiden Berührungspunkte sind Fixpunkte und Singularitäten des Bahnkurvenfeldes. Alle Bewegung ist Bewegung von einem Fixpunkt zum anderen, also verallgemeinerte Translation.

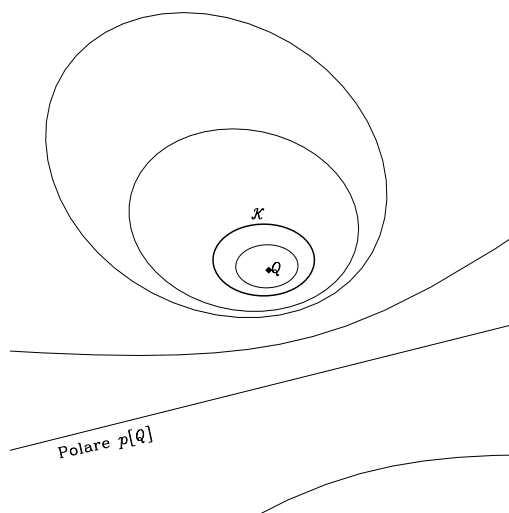


Abbildung 9.17: Drehungen in der Lobachevski-Geometrie

Im Vergleich mit Abbildung 9.16 legen wir nun den Drehpunkt in das Innere des absoluten Kegelschnitts. Die Tangenten sind nun nicht mehr reell und fallen als Trennlinien des Kreisbüschels weg. Die Bahnkurven sind nun (projektiv) alle geschlossen, sowohl im Innenraum wie im Außengebiet des absoluten Kegelschnitts.

alle Bahnkurven in projektivem Sinne geschlossen und können mehrfach durchlaufen werden. Das sind wir von der euklidischen Drehung ohnehin gewohnt. Die Polare des Drehpunktes ist die einzige gerade Bahnkurve. Die euklidische Geometrie (in einer Projektion, welche die Ferngerade wie hier als endliche Polare darstellt) zeigt das gleiche Bahnkurvenbild, nur daß hier der Kegelschnitt  $\mathcal{K}$  eine ganz gewöhnliche Bahnkurve ist. Der absolute Kegelschnitt ist ja in der euklidischen Geometrie nicht mehr reell. – Wir können uns auch eine Drehung um einen unendlich fernen Punkt vorstellen, der auf dem absoluten Kegelschnitt und damit seiner Polaren liegt (Abb. 9.18). Alle Bahnkurven berühren<sup>4</sup> die Polare im Punkte  $Q$ . – Hat der absolute Kegelschnitt keine reellen Punkte, ergeben sich die Bahnkurven der elliptischen Geometrie. Das Bild ist mit dem der Lobachevski-Geometrie identisch (Abb. 9.17), nur daß der Kegelschnitt, der dort den absoluten Kegelschnitt darstellt, ein gewöhn-

<sup>4</sup>In Abbildung 9.18 scheinen die unteren Kurven dies nicht zu tun. Man muß aber beachten, daß diese (nach der einfachen euklidischen Anschauung) ja Hyperbeln sind, die eine Gerade nur in einem Ast berühren können. Dieser zweite Ast liegt in der Zeichnung oberhalb der Polaren und gehört auch zu den (hier berührenden) Bewegungsbahnen.



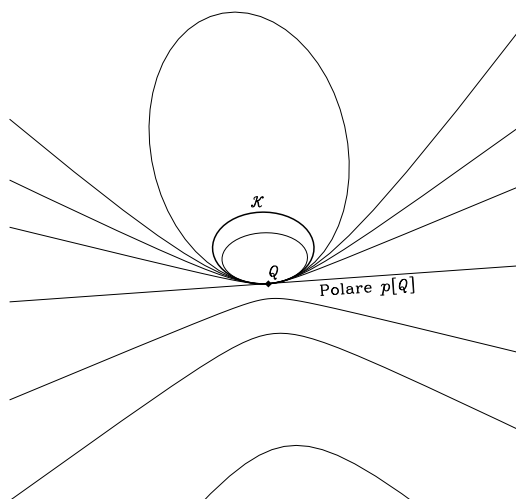


Abbildung 9.18: Drehungen um unendlich ferne Punkte

Im Grenzfall zwischen den Abbildungen 9.16 und 9.17 legen wir den Drehpunkt auf den absoluten Kegelschnitt selbst, also ins metrisch Unendliche. Neben dem absoluten Kegelschnitt und dem Drehpunkt bleiben die Tangente und der Berührungspunkt unverändert.

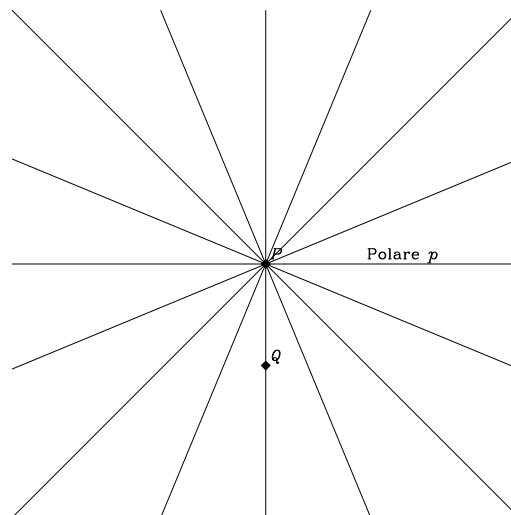


Abbildung 9.19: Drehungen um einen Punkt der absoluten Polaren

Die Bahnkurven der Drehung werden zu Strahlen durch einen Pol, wenn ein absoluter Pol existiert oder der Drehpunkt auf einer absoluten Polaren liegt.

licher endlicher Kreis ist. Auch wenn der nichtreelle absolute Kegelschnitt zu einer Geraden entartet (auf der er dann eine polare Involution ohne Fixpunkte bestimmt) und die euklidische Geometrie entsteht, ändert sich an dem Bild nichts. Allerdings ist die Polare, die in der elliptischen Geometrie vom Drehpunkt abhängig ist, jetzt universell immer die gleiche. – Liegt nun auch noch der Drehpunkt  $Q$  auf der Polaren, entarten die Kreise zu einem Strahlbüschel durch den zu  $Q$  konjugierten Punkt  $P[Q]$  auf  $p$  (Abb. 9.19). Dabei ist der konjugierte Punkt durch die Involution auf der absoluten Polaren bestimmt. Er hängt also von  $Q$  ab, solange die Involution nicht entartet ist (euklidische und Minkowski-Geometrie), und ist absolut im Falle der Galilei-Geometrie. – Im Falle der Minkowski-Geometrie entsteht wieder Abbildung 9.16, der absolute Kegelschnitt ist nunmehr das Stück der jetzt absoluten Polaren zwischen den jetzt absoluten Berührungspunkten (den Fixpunkten der Involution). Fallen die beiden Fixpunkte zusammen, ergibt sich die Galilei-Geometrie. Die Kreise bilden wieder das Strahlbüschel durch den nun ebenfalls absoluten Pol (Abb. 9.19). Dies gilt ebenso, wenn der reelle absolute Kegelschnitt in einen Punkt (antieuklidische Geometrie), oder in ein Geradenpaar (anti-Minkowskische Geometrie) entartet (Tabelle 9.2).

In diesem Kapitel haben wir gesehen, wie aus der projektiven eine metrische Ebene wird, wenn sie in einen dreidimensionalen Raum eingebettet wird, in dem eine

Tabelle 9.2: Die Bahnkurven der Drehungen

Drehpunkt			
im Endlichen: im Unendlichen:	elliptische G. Abb. 9.17 Abb. 9.18	euklidische G. Abb. 9.17 Abb. 9.19	Lobachevski-G. Abb. 9.17 Abb. 9.18
im Endlichen: im Unendlichen:	Antieuklidische G. Abb. 9.19 Abb. 9.19	Galilei-Geometrie Abb. 9.19 Abb. 9.19	Anti-Minkowski-G. Abb. 9.19 Abb. 9.19
im Endlichen: im Unendlichen:	Anti-Lobachevski-G. Abb. 9.16 Abb. 9.18	Minkowski-Welt Abb. 9.16 Abb. 9.19	deSitter-Welt Abb. 9.16 Abb. 9.18

Quadrik definiert ist. Das hat auf die Idee geführt, die Allgemeine Relativitätstheorie durch eine projektive Theorie im Fünfdimensionalen zu erweitern [66, 75, 64, 114]. Dabei muß allerdings ein inhomogener Raum konzipiert werden, damit das variable Gravitationsfeld auch dargestellt werden kann. Jedem Punkt wird also eine Quadrik zugeordnet. Die Einsteinschen Gleichungen auf dem Feld der Quadriken sind dann mit den Einstein-Maxwellschen Gleichungen für die verkoppelten Felder von Elektromagnetismus und Schwerkraft äquivalent. Die weitere Erörterung würde aber unseren Rahmen sprengen.