

Kapitel 10

Allgemeines

10.1 Relativitätstheorie

In unserem Exkurs über den Zusammenhang von Geometrie und Physik haben wir notgedrungen viele Fakten der Physik ohne genaue beobachtungsseitige Begründung und viele Sätze der Geometrie ohne mathematischen Beweis angeführt. Wer an irgendeiner Stelle Genaueres wissen möchte, für den ist im Anhang Literatur angegeben und im Verzeichnis am Ende des Buches zusammengestellt. Einige aus dem Text etwas herausfallende, aber in seinem Zusammenhang immer wieder gestellte Fragen sollen aber noch einmal angesprochen werden.

Die Relativitätstheorie, die wir als physikalischen Partner der Minkowski-Geometrie immer wieder herangezogen haben, ist eine physikalische Theorie wie viele andere auch, sie muß experimentell überprüft werden. Dabei wird die *Anwendbarkeit* geprüft, nicht die Widerspruchsfreiheit. Die Frage der *Widerspruchsfreiheit* ist Sache der Mathematik¹. Deren Aufgabe erschöpft sich nicht allein im richtigen logischen Schluß und der richtigen Rechnung, sondern führt auf ein Programm immer tieferer Gründung. Die Frage der Anwendbarkeit bleibt merkwürdigerweise immer unklar, solange die Grenzen der Anwendbarkeit nicht festgestellt sind. Ein positiv ausgefallenes Experiment sagt etwas aus über die Anwendbarkeit im benutzten Kontext und im benutzten Parameterbereich von Geschwindigkeiten, Energien, Massen, Ladungen, Temperaturen und so weiter. Extrapolation in andere, eventuell extreme Umstände ist denkbar, muß aber sofort wieder überprüft werden. Nur ein negatives Experiment kann in diesem Sinne endgültig sein. Solche Endgültigkeit hat aber auch ihre positive Seite. Kennen wir nämlich die Umstände, bei denen die Anwendbarkeit zu wanken beginnt, dann wissen wir eben, unter welchen Umständen sie noch *nicht* verloren ist, dann wissen wir, wo wir sie unbesehen voraussetzen dürfen.

¹Wie die Anwendbarkeit in der Physik bestenfalls in definiertem Rahmen und nie universell bewiesen werden kann, kann auch Widerspruchsfreiheit bestenfalls in gegebenem Rahmen gezeigt werden. Es war eine der unerwarteten Einsichten der mathematischen Logik, daß in jedem theoretischen Rahmen Aussagen existieren, die in diesem nicht bewiesen oder widerlegt werden können.

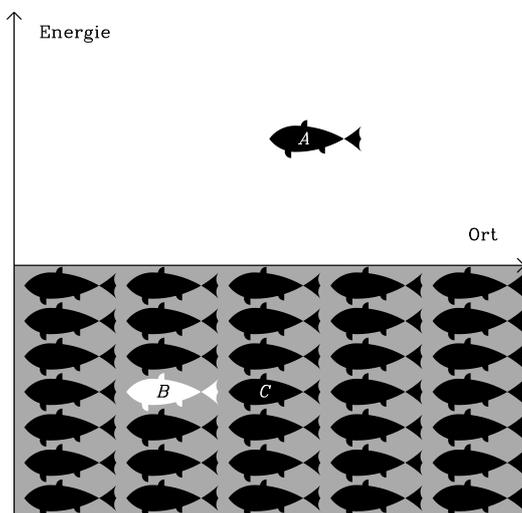
Der negative Ausgang des Michelson-Versuchs, der uns darüber informiert, daß bei großen Geschwindigkeiten die Newtonsche Mechanik nicht angewandt werden darf, sagt eben auch, daß bei Geschwindigkeiten wesentlich kleiner als die Lichtgeschwindigkeit der Newtonschen Theorie eben vertraut werden kann und die Fehler von der Größenordnung $O[v^2/c^2]$ sind.

Neben den quantitativen Folgen einer Theorie, die im quantitativen und deshalb auch immer etwas ungenauen Experiment überprüft werden müssen [46, 53, 55, 56, 146], gibt es auch qualitative Folgen, die direkt mit Grunderfahrungen verglichen werden und eine noch viel wichtigere Rolle spielen, weil sie ganz unabhängig von kleinen Fehlern sind. Für die Relativitätstheorie ist das wichtigste Beispiel einer solchen Aussage die Existenz von Antiteilchen. Diese Existenz von Antiteilchen wurde von der Theorie vorhergesagt, nicht als kleiner Effekt, sondern als *strukturelle* Notwendigkeit zur konsistenten Behandlung der grundlegenden Gleichung für die Energie eines freien Teilchens. Diese Gleichung ergibt sich aus der Eigenschaft der Ruhmasse, für das Teilchen charakteristisch zu sein, und der Proportionalität von Energie und träger Masse, die ihrerseits die Zeitkomponente des Impulses bestimmt:

$$m^2 c^2 - \mathbf{p}^2 = m_0^2 c^2, \quad E = mc^2 \quad \rightarrow \quad E^2 = c^2(m_0^2 c^2 + \mathbf{p}^2) .$$

Das ist eine quadratische Gleichung, die auch negative Lösungen hat. Ist die Gleichung gültig, müssen diese Lösungen auch in Betracht gezogen werden. Die Existenz von Zuständen negativer Energie hat ähnliche Konsequenzen wie die Existenz von Tachyonen. Wenn ein Teilchen Zustände beliebig negativer Energie annehmen kann, wird ein thermodynamisches Gleichgewicht unmöglich. Wir beobachten aber Gleichgewichte. Tatsächlich setzen die meisten einfachen und langsamen Experimente solche Gleichgewichte voraus. Es muß folglich einen Grund geben, der es Zuständen negativer Energie unmöglich macht, ohne weiteres mit den beobachteten Zuständen positiver Energie in Kontakt zu treten. Es war Diracs Vermutung, daß man die Zustände negativer Energie in der Regel als *besetzt* und deshalb inert ansehen muß. Das sieht nach Entschuldigung aus, aber es hat beobachtbare Konsequenzen. Gegebenenfalls unbesetzte Zustände (Löcher) benehmen sich nämlich nun wie Teilchen gleicher Ruhmasse und entgegengesetzter Ladung, d.h. Antiteilchen (Abb. 10.1). Wenn ein reales Teilchen in einen freien Zustand negativer Energie übergeht, verschwindet das Loch. Das Teilchen wird inert und verschwindet aus den Bilanzen, nur die Energie bleibt übrig und geht auf andere Freiheitsgrade über, z.B. in Photonen. Teilchen und Antiteilchen annihilieren kombiniert, d.h., sie verwandeln sich in andere Teilchen, die Energie, Impuls und Drehimpuls wegtragen. Die tatsächliche Beobachtung solcher Antiteilchen, die Beobachtung der Gleichheit der Ruhmassen von Teilchen und Antiteilchen [47] und der Spiegelung der Ladungen mit der Konsequenz der Erzeugung (siehe Abb. 2.7) und Annihilation von Teilchen-Antiteilchen-Paaren ist eine qualitative Bestätigung der Relativitätstheorie, die sie zu einer der unumgänglichen theoretischen Erkenntnisse der modernen Physik macht.

Die Grenze der (speziellen) Relativitätstheorie kennen wir: es ist das Gravitationsfeld. Unter dem Einfluß der Schwere wird die Welt gekrümmt. Der Minkowski-



In einem dicht gepackten Fischschwarm kann sich der einzelne Fisch nicht mehr gegen den Schwarm bewegen. Wird aber ein Fisch (*A*) herausgeangelt, entsteht ein Loch (*B*), in das ein anderer (*C*) nun hineinschwimmen kann. Dabei bewegt sich das Loch von *B* nach *C*, entgegengesetzt zu der Ursache, die den Fisch bei *C* veranlaßt, die Position *B* einzunehmen. Die Ladungen von Loch und geangelttem Fisch sind entgegengesetzt. Die trägen Massen sind aber immer noch die gleichen: Das Loch bewegt sich zwar in *Gegenrichtung* zum Fisch, aber immer noch mit der gleichen Beschleunigung. Fällt der geangeltte Fisch wieder in den Schwarm, ist das Loch verschwunden, und er selbst kann sich nicht mehr frei bewegen, ist als Einzelobjekt ebenfalls nicht mehr zu finden.

Abbildung 10.1: Antiteilchen als Löcher

Raum bleibt dann nur eine lokale Näherung. Betrachten wir die Abbildungen 7.20, 7.22 usw., so bleibt die Minkowski-Geometrie in den *Tangentialebenen* auch der Hyperboloide gültig, die den gekrümmten Kosmos darstellen. Für die Hyperboloide wie für jede andere gekrümmte Welt finden wir immer noch die Lichtkegelstruktur, d.h., es gibt lichtartige Richtungen, die einen Kegel formen. Diese Kegel lassen sich aber nicht mehr so starr transportieren und vergleichen wie im Minkowski-Raum. Die Metrik beginnt, von Ort zu Ort in kleinen Schritten zu variieren. Die quantitativen Veränderungen gegenüber den Aussagen der Relativitätstheorie vor Berücksichtigung des Schwerfeldes sind von der Ordnung des Gravitationspotentials, das sich für die Milchstraße am Ort des Sonnensystems nur auf 10^{-6} summiert. Die Geschwindigkeit des Sonnensystems auf seiner Bahn um das Zentrum der Milchstraße entspricht diesem Potential. Erst das Potential des gesamten sichtbaren Universums erreicht einen Wert der Größenordnung Eins. Der Kosmos insgesamt wird also deutlich vom Minkowski-Raum abweichen. Beispiele dafür haben wir mit dem deSitter-Raum gezeichnet.

Das expandierende Universum ist das Gefäß für thermodynamische Kondensationsprozesse. Diese laufen in einem Wärmebad ab, das aus Strahlung aller Art besteht und sich wegen der Expansion abkühlt. Es ist die Hintergrundstrahlung, deren elektromagnetischer Teil seit 1965 als Mikrowellenhintergrund beobachtet wird. Diese Strahlung hat heute eine Temperatur von etwa 2.73 K. Die Temperatur hat ständig wegen der Expansion des Universums abgenommen. In der fernen Vergangenheit, als das Universum 100000 Jahre noch nicht erreicht hatte, trug diese Strahlung den Löwenanteil der Masse im Universum, und die meisten thermodynamischen Prozesse waren thermisch an dieses Bad gebunden. Heute ist sie kalt und von ge-

ringer Bedeutung für die Prozesse in den Himmelskörpern und in ihrer Umgebung. Trotz der geringen Temperatur dieses Hintergrundes ist man aber in der Lage, die geringe Doppler-Verschiebung zu messen, die sich aus der Bewegung unserer Erde gegen diesen Hintergrund² ergibt. Dies scheint das Problem zu stellen, daß der Hintergrund ein *absolutes* Ruhssystem vorgibt trotz aller Relativitätstheorie. Überall im Universum kann man sich an diesem Ruhssystem orientieren und Ruhe oder Geschwindigkeit bestimmen. Ist das der „Äther“ der Relativitätstheorie? Ist das gar ein Widerspruch zur Relativitätstheorie? Die Antwort ist ein klares *Nein*. Das Photonenbad der Hintergrundstrahlung ist ein äußerer Bezug, dessen Existenz von der Relativitätstheorie nicht verboten wird, und gegen den ein Experiment *abgeschirmt* werden kann. Darüber hinaus wird die Lichtausbreitung durch die Existenz des Photonenbades *nicht* beeinflußt. Wie wir auf Seite 60 formuliert haben, ist das der entscheidende Punkt. Man muß dies aber nicht unbedingt erwarten. Es könnte sein, daß die Photonen miteinander so stark wechselwirken, daß die Lichtausbreitung von der Hintergrundstrahlung modifiziert würde. Dann wäre eine Situation erreicht, die man wieder genauer untersuchen müßte, die bei genügend hohen Photonendichten erreicht würde und die man als Abweichung der Lichtgeschwindigkeit von der absoluten Geschwindigkeit, wie sie sich etwa in der Geschwindigkeitsabhängigkeit der Masse zeigt, beschreiben müßte. Die Dichte der Hintergrundphotonen ist aber nur 10^{-6} der Photonendichte der Wärmestrahlung in einem Laboratorium bei Zimmertemperatur, wir können hier keinen Effekt erwarten, schon gar keinen, der die Gültigkeit der Relativitätstheorie in Frage stellt.

Nachdem die (spezielle) Relativitätstheorie die Geschwindigkeit endgültig in den Bereich der relativen Größen verbannt, die erst durch die Umgebung definiert sind, tut dies die allgemeine Relativitätstheorie nun auch mit den Beschleunigungen, indem sie auf die geodätische Bewegung in einer lokal gekrümmten Welt abstellt. Das Äquivalenzprinzip von schwerer und träger Masse sorgt dafür, daß in einem frei fallenden (und nicht rotierenden) System von schweren Körpern das äußere Gravitationsfeld unmeßbar (von innen) wird. Nur Relativbeschleunigungen zwischen den einzelnen Teilen des Systems bleiben feststellbar. Diese Relativbeschleunigungen können von der Inhomogenität des äußeren Gravitationsfeldes (d.h. von Gezeitenkräften) herrühren. Die Frage, ob die Feststellbarkeit der Rotation einen physikalischen Grund in der Existenz der kosmischen Umgebung hat, wird unter dem Stichwort *Machsches Prinzip* oft diskutiert. Aus der Sicht der Relativitätstheorie bedeutet dieses Prinzip nicht nur die Abhängigkeit der Lage der Lichtkegel in der Welt von der Materieverteilung (dies beschreibt bereits die Allgemeine Relativitätstheorie) sondern sogar die Abhängigkeit der puren *Existenz* der Lichtkegel von der Materieverteilung [16, 85]. Die Existenz einer Maßbestimmung der hier immer be-

²Die Bewegung setzt sich natürlich zusammen aus der Bewegung der Erde um die Sonne, der Sonne um das Zentrum der Milchstraße, der Milchstraße gegen den Schwerpunkt der lokalen Gruppe und der lokalen Gruppe gegen den Hintergrund. Die letztere wird mit 610 km/s in Richtung 1031-26 (Sternbild Wasserschlange) angegeben, die der Sonne gegen den Hintergrund mit 370 km/s in Richtung 1112-07 (beide Richtungen liegen in der Nähe des Herbstpunktes).

sprochenen Art wird dadurch relativiert.

An dieser Stelle weisen wir noch einmal darauf hin, daß aktuell realisierte geometrische Beziehungen in jedem Fall von der Physik geliefert werden, auch wenn die Geometrie dann versucht, von dieser Genese so unabhängig wie möglich zu werden. Was in den Gesetzen physischer Bewegung nicht vorkommt, kann nicht erfahren werden, weil nur die physische Bewegung der messenden Erfahrung und eventuell der experimentellen Präparation fähig ist. In diesem generellen Kontext ist die akzeptierte Beschreibung der Bewegung ein Variationsprinzip. Nach Bestimmung der Lagekoordinaten wird ein Integral analog dem Fermatschen Prinzip (S. 29) gesucht, so daß unter allen virtuell möglichen Bewegungen die aktuell ablaufende diesem Integral einen Extremwert gibt. Das Integral ist also eine Bewertung der verschiedenen Bewegungsmöglichkeiten. Aus der Sicht physikalischer Anwendung fließt alle Geometrie aus der Invarianz dieses Integrals. Was die Form dieses Integrals unverändert läßt, kann ohne äußeren Bezug im Experiment nicht entschieden werden, bleibt also relativ. Nur Maßnahmen, welche die Form des Integrals verändern, betreffen absolute, d.h. ohne äußeren Bezug bestimmbare, Größen.

10.2 Geometrie und Physik

Die Physik hat zwei typische Aufgaben. Sie untersucht einerseits die Gründe und Gesetze für die *Veränderung von Ort, Orientierung, Gestalt und Struktur* der verschiedensten Objekte, deren einfachstes Beispiel die Bewegung von Körpern gegeneinander ist, und andererseits die Gründe und Gesetze der *Klassifizierung vergleichsweise unveränderlicher Strukturen*, wie wir sie etwa im Periodensystem der chemischen Elemente vorfinden. Die zweite Aufgabe kann als Spezialfall der ersten gesehen werden, nämlich als Antwort auf die Frage, welche Zustände bei den gegebenen Bewegungsgesetzen unveränderlich bleiben können. Glücklicherweise findet man eine Hierarchie von Eigenschaften, manche veränderlich, manche fest unter den vom Experimentator eingerichteten Bedingungen, und man kann in der Tat die Begriffe Position, Orientierung, Gestalt und Struktur gegeneinander abgrenzen. Beiden Aufgaben gemeinsam ist die gewaltige Bedeutung der allgemeinen Symmetrien, die von Bewegungsgleichungen und Strukturen manchmal gleich, manchmal verschieden dargestellt werden.

Geometrie ist die einfachste Methode, die Trennlinie zwischen variabler (allgemeiner) Lage und fester (allgemeiner) Form zu modellieren und Kongruenz und Symmetrie zu untersuchen. Wir haben gesehen, daß zwei Wege beschritten werden können. Einmal können wir festlegen, welche Formen kongruent sein sollen, und danach die Operationen bestimmen, die ein Objekt in ein anderes, kongruentes überführen. Zum anderen können wir mit der Bestimmung gerade dieser Transformationen beginnen und hernach die Objekte bestimmen, die einander kongruent sind. Aus mathematischer Sicht muß eine Vereinbarung getroffen, aus physikalischer Sicht die Zweckmäßigkeit untersucht werden. Wir haben gesehen, daß die einfachsten

Operationen, die Spiegelungen, zu gewöhnlichen Bewegungen (Drehungen, Verschiebungen) zusammengesetzt werden können. Erweitern wir die Definition der Symmetrie aber auf die Definition erlaubter (formerhaltender) Veränderungen, können auch viel allgemeinere Fälle erfaßt werden.

Lage und Orientierung können von den anderen Eigenschaften getrennt untersucht werden. Das müßte nicht unbedingt so sein. Wir könnten finden, daß die Maße eines Gegenstands etwa von seiner Geschichte abhängen. Dann können wir uns zwei dieser Gegenstände vorstellen, die zu einem Zeitpunkt in vereinigter Lage durchaus identisch sind. Verschieben wir sie nun auf verschiedenen Bahnen durch den Raum und bringen sie wieder an einen Ort, sind sie nicht mehr gleich, auch wenn wir in ihre innere Struktur nicht eingegriffen haben. Dann lassen sich die erhofften inneren Eigenschaften der Körper nicht mehr unabhängig von Lagerung und Bewegung im Raum präparieren und untersuchen. Wir sehen daraus, daß bereits die Erfahrbarkeit von Geometrie, von Kongruenz, davon abhängt, daß die physikalischen Gesetze der Bewegung im Raum diese Erfahrung zulassen. Zu den Maßen eines Objekts gehören nun nicht nur seine räumlichen Ausdehnungen und Strukturen, sondern auch die Zeitintervalle seiner internen Bewegungen wie die Ticks einer Uhr. Lagrange schreibt bereits, daß die Mechanik als Geometrie in vier Dimensionen angesehen werden kann und die mechanische Analyse eine erweiterte geometrische Analyse ist³. Mit der Relativität der Gleichzeitigkeit wird die Raum-Zeit-Union unauflösbar, wie es Einstein implizit und Minkowski explizit formuliert haben. Die Existenz einer Geometrie von Raum *und* Zeit ist ebenfalls nur erfahrbar, weil die physikalischen Gesetze der Bewegung sie respektieren.

Dennoch werden die Gesetze der Bewegung so formuliert, daß es scheint, die Welt und die Geometrie derselben sei vorausgesetzt, um die physikalischen Beziehungen hineinzuschreiben. Dies hat seinen Grund darin, daß die elementare Erfahrung der Geometrie möglich ist, ohne die physikalischen Zusammenhänge zu kennen, die einen Maßstab starr und eine Uhr regelmäßig werden lassen. Es scheint eben gute Uhren und Maßstäbe zu geben, und diese lassen uns die geometrischen Eigenschaften der Welt vermessen⁴. Erst mit fortschreitender Analyse kann man erkennen, wo auch die besten Uhren und Maßstäbe ihre spezifischen Schwächen haben, und wie man dies berücksichtigen muß. In der Geometrie der Relativitätstheorie erlaubt die Existenz einer absoluten Geschwindigkeit, die Längenmessung auf eine Zeitmessung zu reduzieren und den starren Maßstab durch eine Lichtuhr zu ersetzen. Es bleibt

³ *Ainsi, on peut regarder la mécanique comme une géométrie à quatre dimensions et l'analyse mécanique comme une extension de l'analyse géométrique.* ([80], Nr.185). Allerdings verschwand dieser Eindruck hinter dem Begriff des Konfigurationsraums, der für N Teilchen $3N$ Dimensionen hat, und in dem die Zeit eine ganz eigentümliche Rolle spielt [8].

⁴ Poincaré wandte ein, daß das Argument ein Zirkelschluß ist und daß es Geschmacksache ist, wie Raum und Zeit beschrieben werden, wenn man nur darauf die Physik geeignet formuliert [2]. Es gibt jedoch mehr und weniger gut passende „Konventionen“, wie wir aus der Geschichte des Problems wissen. H.Poincaré [99] schreibt: „Durch natürliche Auslese hat sich unser Verstand den Bedingungen der Außenwelt angepaßt. Er hat die vorteilhafteste Geometrie gewählt. Mit anderen Worten, Geometrie ist nicht wahr, sie ist vorteilhaft.“

dann immer noch, über die Beziehung zwischen starren Maßstäben und der Lichtuhr nachzudenken. Einstein [38] stellte fest, daß in einer wirklich befriedigenden Theorie Uhren und Maßstäbe durch die Theorie selbst konsistent bereitgestellt werden müssen. Vermutlich ist diese Frage letztlich nur durch das Wirkungsintegral einer universellen Dynamik zu lösen. Deren Maßgabe für die Wege im Zustandsraum sollte sich auf alle Teilfragen vererben.

Es ist eine andere Frage, ob es nur *eine* konsistente Geometrie für die Welt gibt oder mehrere Möglichkeiten vorhanden sind, von denen wir eben nur eine bestimmte vorfinden oder von denen nur eine bestimmte einfach anpaßbar ist? Wenn es mehrere Möglichkeiten gibt, unterscheiden diese sich dann so sehr, daß wir sie mit der beschränkten Genauigkeit unserer Meßgeräte bereits erfassen können, oder muß man noch nach Gelegenheiten der Entscheidung suchen? Die erste der beiden Fragen reicht bis in die tiefsten Gründe der Kosmologie und ist dort durchaus ungelöst. So tief wollten wir aber nicht loten. Für uns stand nur ein Teilaspekt zur Diskussion, und hier ist eben die Antwort, daß es mehrere Möglichkeiten gibt. Die zweite der beiden Fragen fordert die messende Physik heraus, und wir wollten zeigen, wie die Anwendung geometrischer Vorstellungen durch physikalische Beobachtung nahegelegt und gerechtfertigt wird.

Die Relativitätstheorie spielt eine besondere Rolle im Verhältnis von Physik und Geometrie. Schließlich war die Geometrie der Raum-Zeit, die sie verlangte, die erste physikalisch greifbare Alternative zur euklidischen Geometrie des Raums, die bis dahin geradezu denknötig schien. Alle mathematischen Konstruktionen anderer Geometrie suchten immer noch ihre Entsprechung. Andererseits waren Lorentz, Poincaré und Einstein nach der Maxwellschen Entdeckung der Gleichungen der Elektrodynamik gezwungen, Raum und Zeit neue Eigenschaften zuzugestehen, die sich eben als Geometrie einer vierdimensionalen Raum-Zeit erwiesen. Die Relativitätstheorie wischte damit eine Reihe von Versuchen vom Tisch, die das merkwürdige Verhalten der Lichtausbreitung durch mechanische Modelle eines Mediums (des sogenannten Äthers), also durch Physik erklären wollten. Alle diese Versuche waren nun überflüssig. Physik und Geometrie kamen in engste Berührung. Während Hilbert würdigte, daß die Geometrie nun zur Physik wurde (einige Fragen der Geometrie wurden physikalisch behandelbar), sah Einstein in der Relativitätstheorie, daß Physik zur Geometrie wurde: Geometrische Gesetze bestimmten physikalische Prinzipien. Dies charakterisiert am besten die dialektischen Beziehungen, die wir an der gemeinsamen Grenze von Physik und Geometrie finden, einer Grenze, die nur sehr unscharf definiert werden kann [38].

Wir haben versucht, diesen Zusammenhang zwischen Geometrie und Physik, die Grenzen einer Physik ohne Geometrie, die Grenzen einer Geometrie ohne Physik, die Freiheit der Geometrie und die Freiheit der Physik gegenüberzustellen, in Abbildungen zu beschreiben und eine Vorstellung davon zu geben, welche erstaunlichen Zusammenhänge sich dem Suchenden und Studierenden auftun. Suchen und Studieren ist damit nicht überflüssig geworden, aber nun ahnen wir, was uns an Einsicht erwartet.

