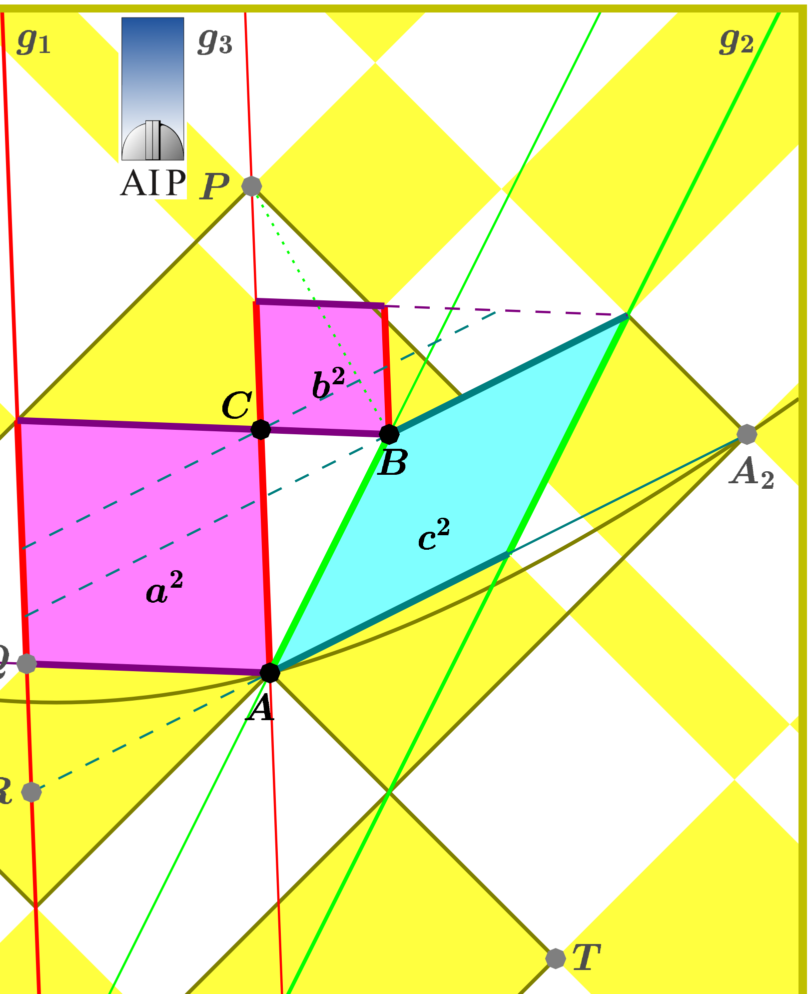
Wir sehen die Streifenregistrierung horizontaler Bewegung. Die vertikale Richtung ist die Zeit. Die Einheit auf der Horizontalen ist das Lichtjahr, die auf der Vertikalen das Jahr. Kräftefreie Bewegung zeichnet auf dem Streifen eine Gerade, deren Neigung gegen die Vertikale die Geschwindigkeit zeigt.

Kongruenz wird über Spiegelungen definiert. Die Gesetze der physikalischen Spiegelung werden in geometrische Spiegelung übersetzt. Wir nennen die so entstehende Geometrie pseudoeuklidisch. Die Strategie euklidischer Beweisführung bleibt erfolgreich, auch wenn Orthogonalität und Kreis ganz ungewohnt aussehen.



DER PYTHAGORAS DER ZEIT

$$a^2 - b^2 = c^2$$

Licht breitet sich immer in alle Richtungen gleich schnell aus. Zusammensetzung mit anderen Geschwindigkeiten ergibt immer wieder nur Lichtgeschwindigkeit. Bei einer Spiegelung im Fahrplan (d.h. in der Orts-Zeit-Ebene) werden die Lichtlinien immer ineinander gespiegelt. Das ist das Ergebnis der Beobachtungen und Experimente. Jeder Punkt ist Schnittpunkt zweier Lichtlinien. Der Schnitt von deren Spiegelbildern ist das Spiegelbild des Ausgangspunktes. Die Verbindung beider muss das Lot auf dem Spiegel sein ($\overline{A_1A} \perp g_1$). Das Quadrat ist ein besonderes Rechteck. Seine Diagonalen sind Lichtlinien.

U

S

Die Parallelogramme aus Registriergeraden von Lichtsignalen heißen Lichtecke. Die Diagonalen von Lichtecken stehen senkrecht aufeinander. Wir nennen die so entstehende Geometrie pseudoeuklidisch. In einem rechtwinkligen Dreieck der Orts-Zeit-Ebene ist das Hypotenusenquadrat nach Fläche gleich der Differenz der Kathetenquadrate. Der rechte Winkel liegt bei C! Die Projektion ($\overline{AC}$) eines Intervalls ist jetzt länger als das projizierte Intervall ($\overline{AB}$).

Auch $\overline{CP}$ ist länger als $\overline{BP}$. In einem Dreieck aus Registriergeraden (etwa ΔPBA) ist die formale Länge (die hier eine Zeit ist) über den Umweg (hier ABP) kürzer als die direkte Verbindung (hier AP). Besteht der Umweg aus Linien, die von Lichtsignalen gezeichnet werden, hat er die Länge Null: Photonen altern nicht.

Viele Sätze der euklidischen Geometrie gelten homolog und können mit den gleichen Strategien bewiesen werden.

Dierck-E.Liebscher: http://www.aip.de/~lie/

Der Pythagoras der Zeit: $a^2 - b^2 = c^2$

Die Relativitätstheorie Einsteins wird im allgemeinen für eine Sammlung komplizierter Formeln gehalten, deren Interpretation als Widerspruch zu Selbstverständlichkeiten der alltäglichen Erfahrung empfunden wird. Es gibt zwar die berühmten Aussprüche über die Theorie als Geometrie der Union von Raum und Zeit, aber außer Skizzen gibt es keine wirklich geometrische Darstellung. Relativitätstheorie ist aber wirklich Geometrie. Auf dem Poster wird sie im Orts-Zeit-Diagramm dargestellt. Alle wichtigen Zusammenhänge kann man rein geometrisch ableiten. Dabei sind die geometrischen Schlussverfahren in allen Punkten homolog zur euklidischen Geometrie, wie diese an der Schule unterrichtet wird.

Die Zeichnungen in der Orts-Zeit-Ebene sind eine Art Streifenregistrierung von Bewegungen in einer einzigen Richtung, also etwa von Billardkugeln in einer horizontalen Rinne. Wenn der Streifen nach unten gezogen wird, entsteht die Registrierung. Kräftefreie Bewegungen zeichnen Geraden, deren Neigung gegen die Vertikale die Geschwindigkeit zeigt. Der gewöhnliche Kreis tritt nicht auf. Wir können nicht erwarten, die Geometrie in der Orts-Zeit-Ebene mit dem gewöhnlichen Zirkel zu konstruieren. Vielmehr bauen wir sie auf der Spiegelung auf: Zwei aufeinander folgende Spiegelungen sind dann eine Verschiebung oder das Äquivalent der euklidischen Drehung. Die Relativitätstheorie verlangt, dass sich die Reflexionsgesetze auch der Mechanik nach denen des Lichts richten. Während man in der gewohnten Mechanik erwartet, dass sich bei Reflexion das Vorzeichen der *Relativ*geschwindigkeit zum Spiegel ändert, findet man bei der Lichtausbreitung, dass die Geschwindigkeit des reflektierten Lichts *unabhängig* von der Geschwindigkeit des Spiegels ist. Das ist das Fundament der *pseudoeuklidisch* genannten Geometrie von Raum und Zeit.

Wir gehen also davon aus, dass die Weltlinien (d.h.Registrierkurven) von Licht immer Geraden gleicher Neigung (Geschwindigkeit) sind. Wir nennen sie Lichtlinien. Ist die Längeneinheit (horizontal) das Lichtjahr und die Zeiteinheit (vertikal) das Jahr, entstehen zwei euklidisch rechtwinklige Parallenenscharen aus solchen Lichtlinien. Jedes Ereignis ist Schnitt zweier solcher Lichtlinien. Die Spiegelbilder solcher Linien sind leicht zu finden: Es sind die Linien aus der jeweils anderen Schar, die die spiegelnde Gerade im gleichen Punkt schneiden. Diese gespiegelten Lichtlinien müssen sich im Spiegelereignis schneiden: A_1 ist das Spiegelbild von A an g_1, A_2 das Spiegelbild an g_2. AC ist senkrecht auf A_1A wie auf der Parallelen CB. ABC ist ein rechtwinkliges Dreieck, der rechte Winkel ist der bei C.

Die Lichtlinien durch ein Ereignis bilden zusammen mit ihren Spiegelbildern ein euklidisches Rechteck, ein *Lichteck*. Gegenüberliegende Ecken sind spiegelbildlich zur dazwischenliegenden Diagonale. Die beiden Diagonalen stehen senkrecht aufeinander, d.h. sie definieren, was *Aufeinander senkrecht stehen* heißt. Spiegelungen erlauben uns ebenso, Abstände zu vergleichen. So ist die spiegelnde Gerade g_1 der geometrische Ort aller Punkte, die gleich weit von A und A_1 entfernt sind, und die spiegelnde Gerade CB ist der geometrische Ort aller Punkte, die gleich weit von A und P entfernt sind.

Ein Quadrat hat vier rechte Winkel, und es zeichnet sich unter den Rechtecken darin aus, dass seine Diagonalen Lichtlinien sind. Die drei Quadrate über den Seiten sind dargestellt. Mit der euklidischen Beweisstrategie ergibt sich ohne weiteres, dass hier die *Differenz* der Quadrate über den beiden aufeinander senkrecht stehenden Seiten (Katheten) gleich dem Quadrat über der dritten Seite (Hypotenuse) ist. In der euklidischen Geometrie ist es die Summe, und wir kennen die Aussage als *Satz des Pythagoras*. Hier ist es die Differenz, und der Satz hat die gleichen Folgen wie in der euklidischen Geometrie.

AC ist länger als AB. Das sieht gut aus, aber A und P sind symmetrisch zu BC. Es ist also nicht nur $AC = CP$, sondern auch $AB = BP$! Mit $AB < AC$ ist damit auch $AB + BP < AP$: Der direkte Weg von A nach P ist *länger* als der Umweg über B. Länge heißt in dieser Geometrie aber Zeit: Alle Registriergeraden lassen sich in die Vertikale spiegeln, auf der es nur eine Distanz gibt, die Zeit. Deshalb ist die längs ABP ablaufende Zeit kleiner als die längs AP verstreichende Zeit (Zwillingsparadoxon). Bei Lichtgeschwindigkeit vergeht überhaupt keine Zeit: U ist Spiegelbild von T an g_2, V Spiegelbild von T an g_1. Deshalb gilt $ST = SU$ wie auch $ST = SV$. $SU = SV$ heißt aber $SU = SV = ST = 0$: Auf den Lichtlinien ist der Abstand Null. Es vergeht keine Zeit: Photonen altern nicht.

Gleichzeitigkeit muß auf die Geschwindigkeit eines Spiegels (allgemein Bezugssystem, auch Beobachter) bezogen werden: A un A_1 sind gleichzeitig bezogen auf g_1, A und A_2 gleichzeitig bezogen auf g_2. Gleichzeitigkeit ist relativ. B und C sind gleichzeitig bezogen auf g_1. $AB < AC$ heißt deshalb, das die gegen g_1 bewegte Uhr (Registriergerade g_2) langsamer geht als die mit der Registriergeraden g_1. Projektionen sind jetzt *länger* als das projizierte Intervall (Zeitdilatation).

Sehen wir die beiden parallelen Geraden g_1 und g_3 als Weltlinien der Enden eines Stabes an und messen wir seine Länge durch gleichzeitiges Ablesen eines Lineals an den Enden, so ist AQ die Länge des Stabes bezogen auf seine eigenen Weltlinien (g_1, g_3). Lesen wir dagegen gleichzeitig bezogen auf ein Lineal g_2 ab, gegen das sich der Stab bewegt, so finden wir etwa die kleinere Länge $AR < AQ$ (Längenkontraktion)

Der pseudoeuklidische Kreis ist nach euklidischer Sehgewohnheit eine Hyperbel. Auf dem Poster ist ein solcher Kreis um S zu sehen. Er ist der geometrische Ort aller Punkte, die Spiegelbild von A an einer Geraden durch S sind, d.h. deren (pseudoeuklidischer!) Abstand von S gleich SA ist.

D.-E.Liebscher, Astrophysikalisches Institut Potsdam, http://www.aip.de/~lie/

Die Relativitätstheorie Einsteins und die Geometrien der Ebene, B.G.Teubner VG, Stuttgart und Leipzig 1999.