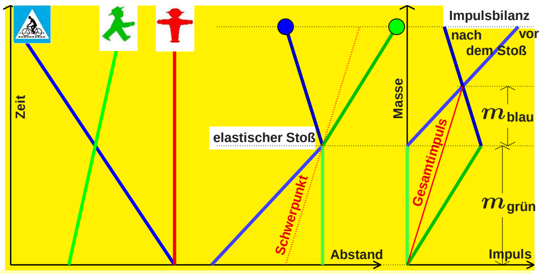
Liebscher 2004

Der kürzeste Weg zur berühmtesten Formel der Wissenschaft führt über die Geometrie auf dem Registrierstreifen

$E = mc^2$



Wir erinnern uns:

1. Kräftefreie (hier horizontale) Bewegung hinterläßt auf dem Registrierstreifen (der hier nach unten gezogen wird) **gerade** Linien (Galileisches Axiom).

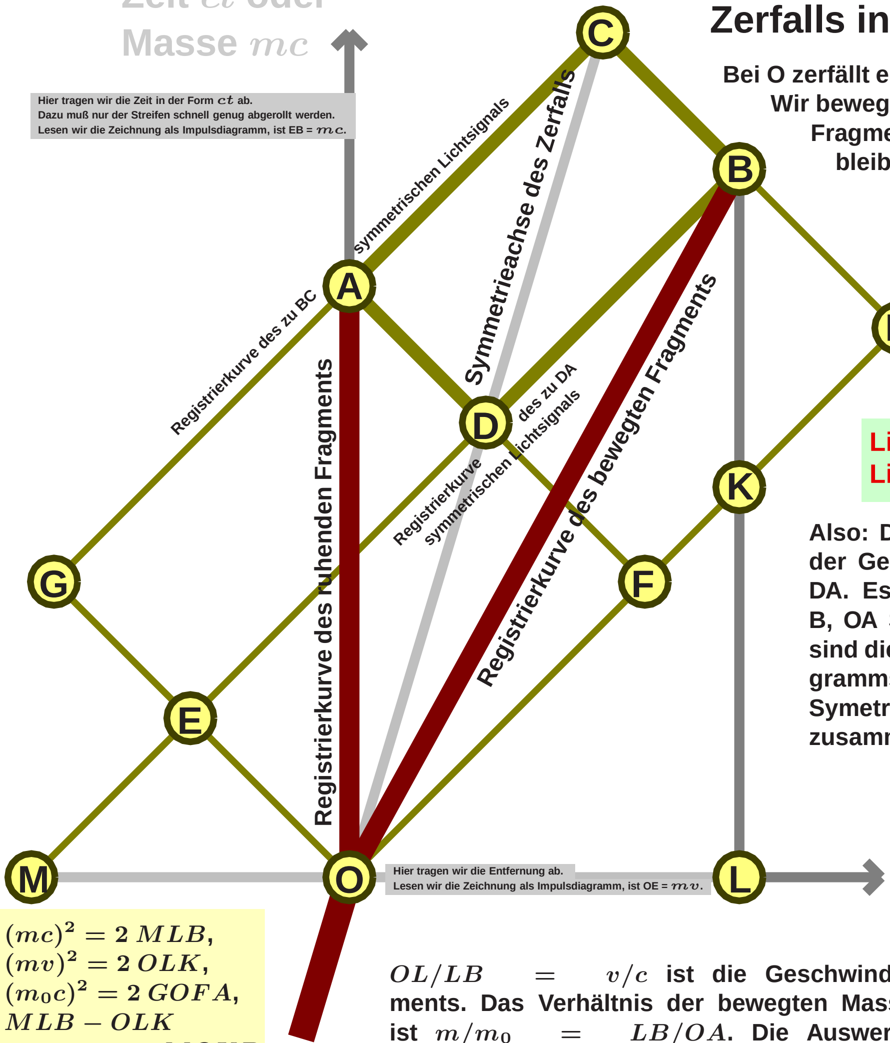
2. Die Neigung der Linien gegen die Vertikale ist die **Geschwindigkeit**.

3. **Masse** ist der Faktor, mit dem die Geschwindigkeiten multipliziert werden müssen, damit ihre so gewichtete Summe erhalten bleibt (Huygenssches Axiom). Das Produkt aus Masse und Geschwindigkeit heißt **Impuls**.

4. Weil der Impuls bei fehlender äußerer Einwirkung erhalten bleibt, ist das Maß einer solchen Einwirkung, die **Kraft** K, proportional der Änderung des Impulses mit der Zeit (2.Newtonsches Axiom)

5. **Energie** ist die zentrale Bilanzgröße in einem System mit zeitunabhängigen äußeren Bedingungen. Die Energiezufuhr durch Beschleunigung ist gleich **Kraft mal Weg**.

Wir analysieren die Registrierung eines Zerfalls in zwei gleiche Teile:



Bei O zerfällt ein Objekt in zwei gleiche Teile. Wir bewegen es vorher so, dass eins der Fragmente am Ort des Zerfalls liegen bleibt. Der Impulssatz verlangt nun

Symmetrie.

Aber:

Die Spiegelung auf dem Registrierstreifen ist **nicht** mehr die der gewohnten Zeichenebene!

Lichtgeschwindigkeit bleibt Lichtgeschwindigkeit (c)!

Also: Die Gerade BC ist Spiegelbild der Gerade AC, DB Spiegelbild von DA. Es folgt: A ist Spiegelbild von B, OA Spiegelbild von OB. A und B sind die Ecken eines Impulsparallelogramms, dessen eine Diagonale die Symetrieachse ist. Nun rechnen wir zusammen:

$(mc)^2 = 2\,MLB$,
$(mv)^2 = 2\,OLK$,
$(m_0c)^2 = 2\,GOFA$,
$MLB - OLK$
$= MOKB$
$= EOHB$
$= GOFA$

$OL/LB = v/c$ ist die Geschwindigkeit des bewegten Fragments. Das Verhältnis der bewegten Masse $m[v]$ zur Ruhmasse m_0 ist $m/m_0 = LB/OA$. Die Auswertung der Zeichnung ergibt $m^2c^2 = m_0^2c^2 + m^2v^2$. Wenn man die Zuwächse ansieht, ist das $m\,\mathrm{d}m\,c^2 = mv\,\mathrm{d}(mv) = m\,\mathrm{d}s\,K = m\,\mathrm{d}E_{\text{kinetisch}}$

Wenn erstens die Gesamtmasse und ebenso die Gesamtenergie erhalten bleiben, und wenn zweitens ein Teil der Energie fest proportional zu einem entsprechenden Teil der Masse ist, dann muss alle Energie einheitlich proportional der Masse sein:

$E = mc^2$

D.-E.Liebscher, http://www.aip.de/~lie/

AIP

Der kürzeste Weg
zur berühmtesten Formel der Wissenschaft

führt über die Geometrie auf dem Registrierstreifen einer eindimensionalen (in den folgenden Bildern horizontalen) Bewegung. Er beginnt bei den Newtonschen Axiomen, bezieht sich dann aber auf die Reflexionsregel für das Licht und zeichnet die Registrierung eines symmetrischen Zerfalls in Bewegung neu. Newtons drittes Axiom stellt dann die Änderung der Masse mit der Geschwindigkeit fest. Newtons zweites Axiom zeigt, dass die Zunahme an Masse gerade proportional der Zunahme an kinetischer Energie ist, $\mathrm{d}E_{\mathrm{kinetisch}} = \mathrm{d}mc^2$. Am Ende schließen wir: Wenn ein Teil der Energie proportional zu einem entsprechenden Teil der Masse ist, und wenn die Summe aller Energien ebenso erhalten bleibt wie die Summe aller Massen, muss diese Gesamtenergie mit demselben Faktor proportional der Gesamtmasse sein, also $E = mc^2$.
Das erste Newtonsche Axiom (das Galileische Axiom) stellt fest, dass die kräftefreie Bewegung gerade Linien (gerade Weltlinien) auf den Registrierstreifen zeichnet. Die Neigung dieser Linien gegen die Vertikale ist die Geschwindigkeit. Wir rollen den Registrierstreifen so schnell ab, dass die Neigung der Weltlinie eines Photons 45 Grad beträgt. Das heißt, wir messen die Zeit durch die horizontale (räumliche) Distanz, die das Licht in der gegebenen Zeit zurücklegt.
Das dritte Newtonsche (Huygenssche) Axiom sagt, dass die Geschwindigkeiten v mit einem Faktor gewichtet werden müssen, der nur von den inneren Eigenschaften der Körper abhängt (das ist die träge Masse m), damit die Summe der so gewichteten Geschwindigkeiten erhalten bleibt: Die Summe aller Produkte mv bleibt bei Stößen (allgemein Wechselwirkungen) unverändert. Wir betrachten nun ein Objekt, das in zwei identische Fragmente zerfällt. Ist das Objekt vorher in Ruhe, streben die zwei Fragmente mit entgegengestetzt gleichen Geschwindigkeiten auseinander. Bewegt sich das Objekt bereits mit dieser Geschwindigkeit, bleibt ein Fragment in Ruhe. Die beiden Weltlinien der Fragmente müssen spiegelbildlich zur Weltlinie des Ausgangsobjekts liegen. Dies wird mit dem Licht geprüft. In der Abbildung liegen etwa die Ereignisse A und B symmetrisch zur Geraden OC weil die Richtung BC das Spiegelbild der Richtung AC und die Richtung DA das Spiegelbild der Richtung DB ist.
Wir vergleichen nun die Koordinaten der zwei Punkte A und B. OL/LB ist die Geschwindigkeit (in Einheiten der Lichtgeschwindigkeit) v/c. Wenn die Strecke OL aber den Impuls mv des zweiten Fragments darstellt, dann ist sie auch gleich dem Impuls des bei O zerfallenden Körpers. Das erste Fragment ist in Ruhe, trägt also zum Gesamtimpuls nichts bei. Deshalb ist nun auch $LB + OA$ die Masse $m_{\mathrm{gesamt}}c$ des zerfallenen Körpers, $LB = mc$ die Masse des bewegten und $OA = m_0c$ des liegenbleibenden Fragments. Die Strecke OA entspricht der Masse m_0c des Fragments in Ruhe, Wir erhalten die Relation $m[v]/m_0 = LB/OA$. Man sieht sofort, dass die Masse des bewegten Fragments größer als die des ruhenden ist. Kongruenz- und Flächensätze lassen dieses Verhältnis in die bekannte Formel $m^2c^2 - m^2v^2 = m_0^2c^2$ umrechnen:

> Das Quadrat über LB ist $(mc)^2 = 2\,MLB$, und das Quadrat über OL ist $(mv)^2 = 2\,OLK$, die Differenz also $(mc)^2 - (mv)^2 = 2\,MOKB$. Nun ist $MOE = BKH$, also $(mc)^2 - (mv)^2 = 2\,EOHB$. Es ist darüber hinaus OC die Diagonale sowohl des Parallelogramms $OHCG$ als auch des Parallelogramms $DBCA$. Deshalb sind $EOHB$ und $GOFA$ flächengleich und es gilt $(mc)^2 - (mv)^2 = 2\,GOFA = (m_0c)^2$.

Nun muß noch der Energiezuwachs nach dem zweiten Newtonschen Axiom dargestellt werden. Dazu addieren wir in der eben erhaltenen Formel noch einen kleinen Zuwachs, das heißt, wir ersetzen v durch $v + \mathrm{d}v$, m durch $m + \mathrm{d}m$ und mv durch $mv + \mathrm{d}(mv)$. Wir erhalten $(m+\mathrm{d}m)^2c^2 - (mv+\mathrm{d}(mv))^2 = m_0^2c^2$ und ziehen von dieser Gleichung die vorangegangene ab. Dann erhalten wir bei kleinen Zuwächsen $2mc^2\mathrm{d}m - 2mv\mathrm{d}(mv) = 0$. Das ist der Schlüssel. Die Energie $\mathrm{d}E$, die einem Körper durch Beschleunigung zugeführt wird, ist nach dem zweiten Newtonschen Axiom $\mathrm{d}E = K\mathrm{d}s$, das zunächst in $\mathrm{d}E = (\mathrm{d}(mv)/\mathrm{d}t)\mathrm{d}s$, dann weiter in $\mathrm{d}E = (\mathrm{d}(mv)/\mathrm{d}t)\mathrm{d}s = \mathrm{d}(mv)v$ und schließlich; in $\mathrm{d}E = (\mathrm{d}(mv)/\mathrm{d}t)\mathrm{d}s = \mathrm{d}(mv)v = \mathrm{d}mc^2$ umgeformt werden kann. Der Zuwachs an kinetischer Energie ist also proportional dem Massenzuwachs. Addieren wir alle kleinen Schritte zusammen, und unterstellen wir $m = 0$ für $E = 0$, so erhalten wir $E = mc^2$.

Ergänzende Bemerkungen

Das Wort Relativitätsprinzip ist zunächst ausgesprochen einschüchternd. Es ist aber nichts anderes gemeint als die Erwartung, dass Galileis Beobachtung (dass geradlinige gleichförmige Bewegung - wie auch Position, Orientierung und Zeitpunkt - eines abgeschlossenen und abgeschirmten Raums in Innern nicht festgestellt werden kann, wie fein auch die Messapparaturen seien, die ich zur Verfügung habe) uneingeschränkt gilt. Geschwindigkeit, Position, Orientierung und Zeitpunkt können nur bezogen auf andere, äußere Objekte (Schlaglöcher, Starkästen, Sterne, kosmische Hintergrundstrahlung) benannt werden.
Das erste Newtonsche Axiom (die Idee ist von Galilei, wenn man die undokumentierten, aber erschließbaren Kenntnisse der Mathematiker zwischen Euklid und Archimedes beiseite lässt) muss heißen: *Die Gesamtheit der unbeeinflussten Bewegungen zeichnen in Raum und Zeit eine Geradenschar.* Bezugssysteme kommen noch gar nicht vor, müssen es auch nicht. Auch das Wort kräftefrei sollte vermieden werden, denn Kraft wird erst später genauer definiert. Geraden sind eben nicht über Koordinaten definiert, sondern durch ihre Eigenschaft, sich höchstens einmal zu schneiden, und durch zwei verschiedene Punkte eindeutig definiert zu sein. Das ist alles. Koordinaten kommen erst hinein, weil man zu einer Geradenschar immer Koordinaten (eben ein Bezugssystem) finden kann, in dem die Geraden durch lineare Beziehungen beschrieben werden. Diese Bezugssysteme heißen lineare Bezugssysteme.
Das zweite Newtonsche Axiom gehört logisch erst an die dritte Stelle, da es die Begriffe Masse und Kraft gemeinsam einführt, obwohl der Begriff der Masse fundamentaler und unabhängig von dem der Kraft ist. Grundlegender ist das dritte Newtonsche Axiom, aber eben in einer Form, die von Huygens stammt: *Bei einer Wechselwirkung bleibt die Summe der Geschwindigkeiten genau dann konstant, wenn sie vorher gewichtet wurden. Die Wichtung nennen wir Masse, die gewichteten Geschwindigkeiten Impulse. Und: Die Summe der Massen bleibt konstant.* Dieses Axiom begründet auch ohne weiteres, dass die Kraft nun die Änderung des Impulses bewirken muss, und nicht einfach Beschleunigung.

Dierck-E.Liebscher **http://www.aip.de/˜lie/**