Die Relativität der Kegelschnitte

von Stefan Liebscher und Dierck-E-Liebscher

In der gewohnten Geometrie, die wir an der Schule lernen, unterscheiden wir leichthin zwischen Ellipsen, Parabeln, Hyperbeln und Kreisen und sehen, dass sie alle Kegelschnitte sind. Wir lesen von Brennpunkten, Summenregeln und krummen Spiegeln. Tasten wir uns über die euklidische Geometrie hinaus, erkennen wir, dass diese Eigenschaften der Kegelschnitte sich auf einen in der gewohnten Geometrie unsichtbaren zweiten Kegelschnitt beziehen, der eine Art unendlich ferner Rand der Zeichenebene ist. Auf perspektiven Darstellungen ist dies der Horizont, auf dem sich parallele Geraden schneiden. In dieser Erzählung verwenden wir ihn in sichtbarer Form, als ganz normalen Kegelschnitt. Warum und wie das geht, soll mit elementaren Konstruktionen illustriert werden.

Die Eigenschaften der Kegelschnitte erscheinen nun als Eigenschaften eines Paares, in dem sich einer auf den anderen bezieht. Wir nennen das die Relativität der Kegelschnitte.

1 Von der Parabel zum allgemeinen Kegelschnitt

Der Kegelschnitt, den wir alle nutzen, ist die Parabel. Die Parabel sammelt parallel einfallende Strahlen — die Strahlung von einem ideal weit entfernten Punkt auf ihrer Achse — in einem einzigen Punkt, dem Brennpunkt. Parabolspiegel werden in Scheinwerfern, Satellitenantennen und Teleskopen eingesetzt. Die Parabel ist die Kurve, die sich beim Schnitt eines Kreiskegels mit einer Ebene ergibt, wenn diese parallel zu einer Mantellinie des Kegels liegt. Bei anderen Lagen der Schnittebene ergeben sich Hyperbel und Ellipse mit dem Sonderfall Kreis (Abb. 1).

Abbildung 1: Zerschnittener Kegel. Ein Doppelkegel wird von Ebenen verschiedener Neigung geschnitten. Unten finden wir Ellipsen, links oben Hyperbeln.

Alle Kegelschnitte haben Brennpunkte, und hier interessieren deren allgemeine Eigenschaften. Der einfachste Brennpunkt ist der Brennpunkt der Parabel (Abb. 2). Die Parabel hat eine Symmetrieachse. Die achsparallelen Strahlen werden im Brennpunkt gesammelt, die Strahlen aus dem Brennpunkt werden in achsparallele Strahlen gespiegelt. Aus der Ferne betrachtet, liegen die Spiegelbilder des Brennpunkts alle auf einer Linie senkrecht zur Achse, der Direktrix. Wir lernen schon an der Schule, dass die Punkte auf der Parabel vom Brennpunkt und von der Direktrix gleich weit entfernt sind.

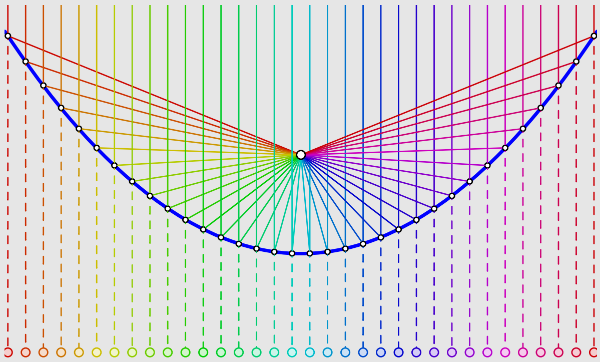

Abbildung 2: Parabel mit gespiegelten Strahlen und der Direktrix. Die Achse der Parabel ist hier vertikal. Achsenparallele Strahlen werden in den Brennpunkt gespiegelt, und das Spiegelbild des Brennpunktes ist aus der Ferne eine Linie senkrecht zur Achse.

Abbildung 3: Das perspektive Bild des Kreises. Detail aus dem Panorama in Frankenhausen von Werner Tübke.

In Architektur und Malerei begegnen wir der Ellipse. Hier wurde sie als perspektives Bild des Kreises entdeckt (Abb. 3). In der Astronomie wurde nach jahrtausendelangen Versuchen, die Form der Planetenbahnen mit Kreisen allein zu beschreiben, die Ellipse als korrekte Bahnform von Johannes Kepler gefunden. Elliptische Spiegel finden in der Medizintechnik Verwendung. Die Ellipse hat auch als Beetform ihren Reiz, und der Gärtner nutzt eine einfache Konstruktion: Die Enden eines Seils werden an zwei Pflöcken befestigt und das Seil mit einem Stift gespannt. Wird der Stift unter Spannung herumgeführt, zeichnet er eine Ellipse. **Die Summe der Abstände von den beiden Fixpunkten ist für alle Punkte einer Ellipse die gleiche**, eben die

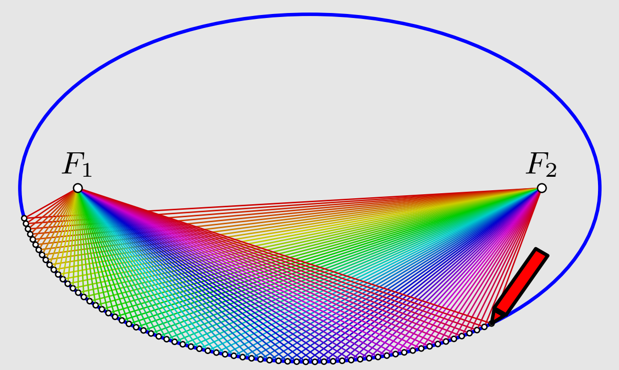

Abbildung 4: Die Regel des Gärtners.

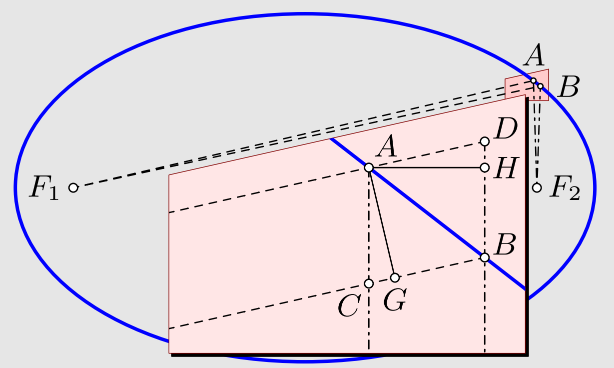

Abbildung 5: Die Regel des Gärtners und die Reflexion an der Ellipse: A und B seien zwei eng benachbarte Punkte der Ellipse, AD und CB Strahlen von F_1, CA und BD Strahlen von F_2. AB ist ein Stück der Tangente. Fällt man von A die Lote, dann gilt wegen der Gärtnerregel $GB = BH$, also sind ABG und ABH kongruent, also ist $AH = AG$. Das Viereck $ADBC$ ist ein Rhombus, CD eine Symmetrieachse, und die Winkel bei A und B sind gleich: Einfallswinkel gleich Ausfallswinkel.

Länge des Seils (Abb. 4). Mit einer kleinen Infinitesimalbetrachtung (Abb. 5) zeigt die Methode des Gärtners auch, warum die Fixpunkte Brennpunkte sind:[1] **Jeder Strahl aus einem Brennpunkt wird an der Ellipse in einen Strahl durch den anderen Brennpunkt gespiegelt** (Abb. 6). Von einem der Brennpunkte aus kann man in jeder Richtung ein Spiegelbild des anderen sehen und zwar immer im gleichen Abstand.[2]

Auch die Hyperbel hat zwei solche Brennpunkte, und die Strahlen aus einem Brennpunkt werden in Strahlen gespiegelt, die aus dem anderen Brennpunkt kommen. Deshalb ist es jetzt auch die Differenz der Entfernungen von den Brennpunkten, die für die Punkte der Hyperbel bis auf ein Vorzeichen konstant ist (Abb. 7). Hyperbolische Spiegel werden in Röntgen-Teleskopen benutzt, um die Baulänge zu verkürzen. Weil Röntgenspiegel nur bei streichendem Einfall gut spiegeln, würde ein Parabolspiegel allein zu lang.[3] Die Gestalt der Hyperbel begegnet uns auch auf der Orts-Zeit-Ebene der Relativitätstheorie [2], wo sie die Rolle des Kreises der gewohnten Geometrie übernimmt.

[1] s.a. http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/inhalt/beispiel/beispiel334/

[2] s.a. http://www.nanni-ingranaggi.com/application.php zu elliptischen Getrieben

[3] s.a. http://www.x-ray-optics.de/index.php

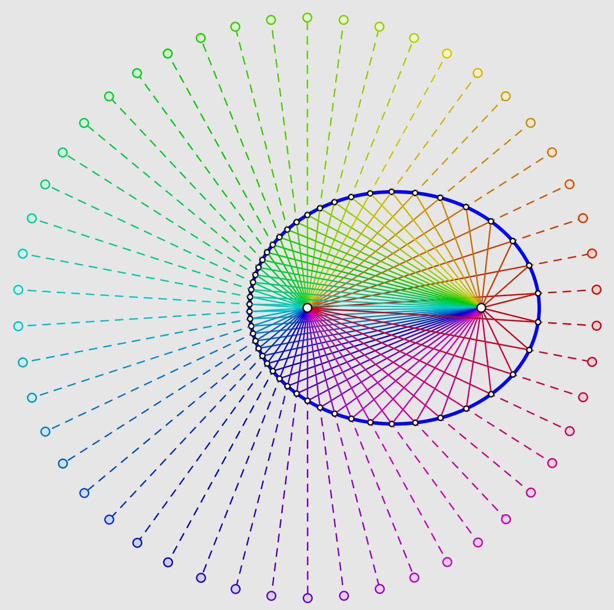

Abbildung 6: Die Brennpunkte der Ellipse Die Pflöcke des Gärtners erweisen sich als Brennpunkte der Ellipse. Die Strahlen von einem Brennpunkt werden in Strahlen auf den anderen Brennpunkt reflektiert (Einfallwinkel gleich Ausfallwinkel). Aus der Sicht des einen Brennpunkts formen die Bilder des anderen einen Kreis, dessen Radius gerade die Länge des Seils ist, das der Gärtner benutzt.

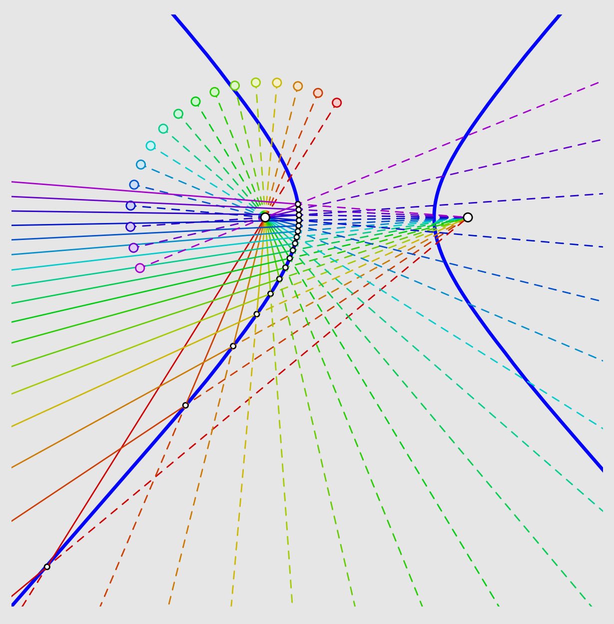

Abbildung 7: Die Brennpunkte der Hyperbel. Die Strahlen aus einem Brennpunkt werden in Strahlen aus dem anderen gespiegelt. Wie bei der Ellipse, formen die Spiegelbilder des einen Brennpunkts einen Kreis um den anderen.

Kegelschnitte haben vorläufig zwei Brennpunkte. (Der zweite Brennpunkt der Parabel ist der unendlich ferne Punkt, aus dem die achsparallelen Strahlen kommen.) Fallen die beiden Brennpunkte in einem Punkt M zusammen, ergibt sich ein Kreis mit diesem Mittelpunkt. Aus der Gärtner-Regel wird der feste Radius, und Strahlen aus dem Mittelpunkt werden wieder in den Mittelpunkt gespiegelt. Der Kreis ist symmetrisch um jede Sehne durch den Mit-

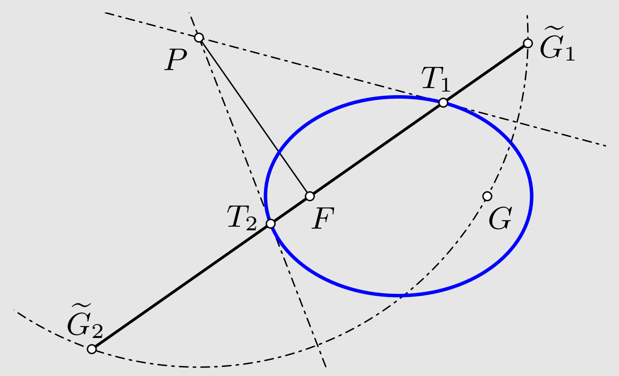

Abbildung 8: Lote auf Sehnen durch einen Brennpunkt. An die Schnittpunkte T_1 und T_2 einer Sehne durch den Brennpunkt F werden die Tangenten gelegt. Diese reflektieren den anderen Brennpunkt G auf die Punkte $\widetilde{G}_1$ und $\widetilde{G}_2$ der Sehne. Diese beiden Punkte liegen nicht nur gleich weit vom Pol P, sondern auch gleich weit vom Brennpunkt F. Deshalb liegt P auf dem in F errichteten Lot.

telpunkt. Deshalb können sich auch die Tangenten an die Endpunkte nicht im Endlichen schneiden: Sie sind parallel und stehen senkrecht auf dem Durchmesser. Die Direktrix des Kreises ist das Unendliche, das wir als Gerade ansehen können, schon weil es auf perspektiven Darstellungen als Horizont erscheint.

Was bleibt davon, wenn die Brennpunkte nicht zusammenfallen? Statt der Durchmesser haben wir nun die Sehnen generell im Blick. Zunächst gibt es zu jeder Geraden g zwei Tangenten in deren Schnittpunkten mit dem Kegelschnitt. Der Punkt, in dem sie sich schneiden, heißt Pol $P[g]$ der Geraden. Der Pol eines Kreisdurchmessers liegt im unendlich Fernen. Die Pole $P[s]$ aller Sehnen s durch einen festen Punkt Q liegen auf einer Linie, der Polare $p[Q]$ dieses Punktes. Ist es ein Brennpunkt, dann ist seine Polare die Direktrix.[4] Auch vom Senkrechtstehen der Tangenten auf den Durchmessern bleibt etwas Wichtiges übrig: **Für alle Sehnen durch den Brennpunkt trifft das Lot, das aus dem Pol auf die Sehne gefällt wird, den Brennpunkt.** Der Pol einer Sehne durch den Brennpunkt liegt auf der im Brennpunkt errichteten Höhe (Abb. 8).

Nun haben wir die drei elementaren Eigenschaften der Brennpunkte, denen wir folgen wollen:

Erstens liegt der Pol einer Sehne durch den Brennpunkt auf der im Brennpunkt errichteten Senkrechten.
Zweitens wird jeder Strahl aus einem Brennpunkt in dem vom ihm getroffenen Punkt des Kegelschnitts an der Tangente in eine Gerade durch den anderen Brennpunkt gespiegelt.
Drittens bilden die Spiegelbilder eines Brennpunktes einen Kreis um den anderen. Das bewirkt die Summenregel des Gärtners.

Alle drei Eigenschaften der Brennpunkte erwarten die Möglichkeit, Abstände zu messen und zu vergleichen.

[4] Umgekehrt ist der Brennpunkt der Pol der Direktrix. Auch wenn die Direktrix den Kegelschnitt nicht in reellen Punkten schneidet, kann man zwei komplexe Schnitte und Tangenten berechnen. Die Tangenten sind konjugiert komplex, deshalb ist ihr Schnitt wieder reell, eben der Brennpunkt.

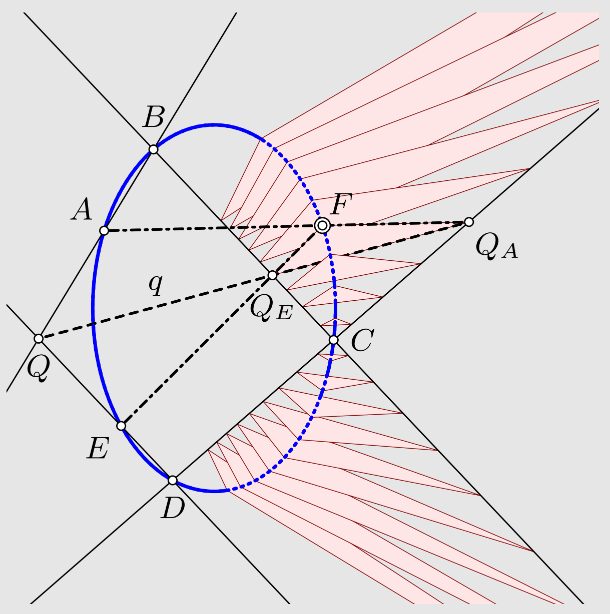

Abbildung 9: Kegelschnitt aus fünf Punkten. $ABCDE$ seien gegeben, ein sechster Punkt F muss so liegen, dass sich die Gegenseiten AB und DE, BC und EF, CD und FA in Punkten schneiden, die auf einer Linie (q) liegen. Der Schnitt Q von AB mit DE liegt fest. Wählt man einen Punkt Q_A als Schnitt von CD mit AF frei auf CD, so ist $q = QQ_A$ bestimmt. Projiziert man Q_A aus Q auf BC, findet man Q_E. Dieser Punkt muss der Schnittpunkt von von BC mit EF sein. Dann ist der Schnittpunkt von EQ_E mit AQ_A ein Punkt F des Kegelschnitts.

Tatsächlich kommt die Definition eines Kegelschnitts **ohne** Abstandsvergleiche aus. Es ist der Satz von Pascal (die drei Schnittpunkte der drei Gegenseitenpaare eines einbeschriebenen Sechsecks liegen auf einer Linie), der es ermöglicht, einen Kegelschnitt mit dem Lineal allein punktweise zu konstruieren, wenn nur fünf seiner Punkte gegeben sind (Abb. 9).

In diesem Satz kann man Punkte und Geraden vertauschen. Dann entsteht der Satz von Brianchon: Die drei Verbindungen der Gegenpunkte eine umschriebenen Sechsseits treffen sich in einem Punkt.

2 Der Kegelschnitt im Hintergrund

Die gewohnte Geometrie benutzt Drehungen und Verschiebungen (des Lineals oder des Winkelmessers) und deren Konstruktion mit Zirkel und Lineal, um Kongruenz festzustellen und nachzuweisen. Der Zirkel erzeugt spezielle Kegelschnitte (Kreise mit beliebigem Mittelpunkt und Radius). Tatsächlich genügt schon die Vorgabe **eines einzigen Kreises mit Mittelpunkt** auf dem Zeichenblatt, um alle anderen Konstruktionen mit dem Lineal allein ausführen zu können [6]. Unser Beispiel ist die Spiegelung eines Punktes (Abb. 10). Wir sehen: Bereits in der gewohnten Geometrie führt ein Kegelschnitt im Hintergrund Regie. Wir werden später darauf zurückkommen. Zunächst erinnern wir uns nur, dass Verschiebungen wie Drehungen aus zwei Spiegelungen zusammengesetzt werden können. Die Geometrie ist bereits allein durch ihre Spiegelungen bestimmt [1].

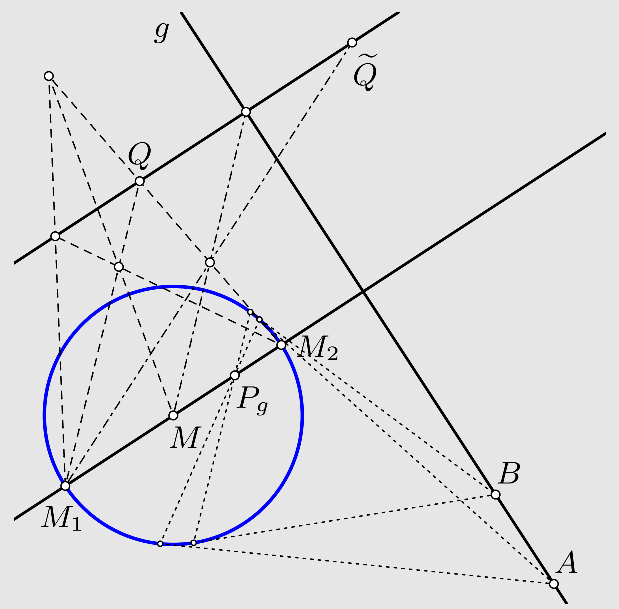

Abbildung 10: Spiegelung ohne Zirkel. Der Punkt Q wird an der Geraden g durch AB gespiegelt. Dazu bedarf es nur eines Lineals, sofern auf der Zeichenebene ein Kreis mit Mittelpunkt M vorliegt. Im ersten Schritt wird der Pol P_g der Geraden g als Schnittpunkt der beiden Polaren bestimmt (punktierte Linien). Die Gerade P_gM steht dann senkrecht auf AB, und M halbiert den Durchmesser M_1M_2. Im zweiten Schritt wird durch Q eine Parallele zu P_gM vermöge der harmonischen Teilung konstruiert (gestrichelte Linien). Im dritten Schritt projizieren wir den Durchmesser auf diese Parallele (strichpunktierte Linien) und finden das Spiegelbild $\widetilde{Q}$.

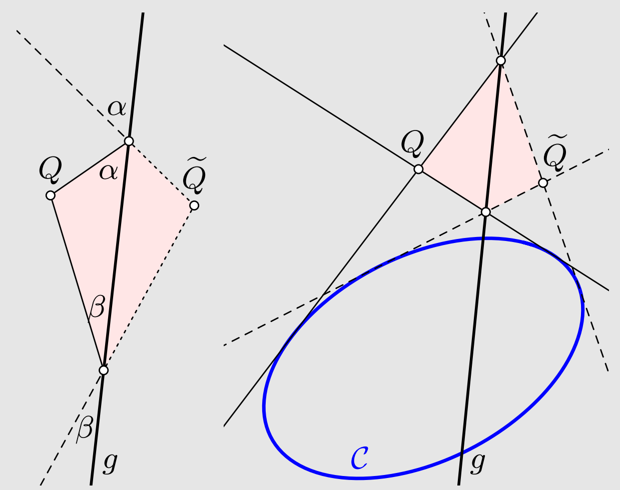

Abbildung 11: Spiegelung eines Punktes. In unserer gewohnten Geometrie (links) wird das Bild einer Geraden durch die Gleichheit der Winkel mit dem Spiegel bestimmt. Diese Gleichheit soll jetzt aber erst durch die Spiegelung bestimmt werden. Wir können uns nur auf die Tangenten an den absoluten Kegelschnitt und deren Bilder berufen (rechts). Vom Aufpunkt Q werden zwei Geraden gezogen, die am Spiegel in zwei Bildlinien gespiegelt werden. Die Geraden werden als Tangenten gewählt. Die Schnittpunkte mit dem Spiegel bleiben am Platz. Die Bildlinien sind die jeweils anderen Tangenten durch diese Schnittpunkte und treffen sich im Bildpunkt $\widetilde{Q}$ von Q. Die 4 Geraden/Tangenten bilden jeweils ein Drachenviereck.

Jetzt wählen wir einen reellen nicht entarteten Kegelschnitt $\mathcal{C}$, um auf ihn Spiegelung zu beziehen. Die Spiegelungen sind bestimmt, wenn $\mathcal{C}$ auf sich selbst abgebildet werden muss. Es folgt daraus unmittelbar, dass das Spiegelbild einer Tangente wieder eine Tangente ist (Abb. 11). Die Konstruktion hat nun Ähnlichkeit mit der gewohnten optischen Spiegelung. Sie läuft auf ein Tangentenvierseit von $\mathcal{C}$ hinaus, dessen eine Diagonale der Spiegel ist. Die anderen Diagonalen fallen mit ihren Spiegelbildern zusammen und sind deshalb Lote auf dem Spiegel. **Die Diagonalen eines Vierseits aus Tangenten an den absoluten Kegelschnitt sind zueinander lotrecht.** Lassen wir vier Ecken eines solchen Vierseits in einen Punkt zusammenfallen, wird dieser zum Pol der verbleibenden Diagonale: Alle Lote auf einer Geraden gehen durch ihren Pol am absoluten Kegelschnitt $\mathcal{C}$.

Der Kegelschnitt $\mathcal{C}$ ist absolut, weil die Spiegelungen ihn auf sich selbst abbilden. Man kann zeigen, dass er nun die unendlich fernen Punkte darstellt. Natürlich sollen Spiegelungen unendlich ferne Punkte auf ebensolche abbilden. Jetzt wird der absolute Kegelschnitt $\mathcal{C}$ zum Bild des Unendlichen. Anders als auf den gewohnten perspektiven Darstellungen, wo eine Gerade **einen** Schnittpunkt mit dem Horizont hat, findet eine Gerade g nun **zwei** Punkte im Unendlichen, nämlich die Schnittpunkte mit diesem Kegelschnitt. Zu einem Punkt abseits der Geraden g gibt es genau **zwei** Geraden, die g im Unendlichen treffen, und ein ganzes Kontinuum von Geraden, die g erst jenseits des Unendlichen treffen.[5] Wir können sie Parallelen nennen.

Die neue Spiegelungsvorschrift kann nur widerspruchsfrei sein, wenn sich die Spiegel (Mittelsenkrechten) dreier Punkte ABC in einem Punkt M treffen. Das Argument ist schon aus der gewohnten Geometrie bekannt: Liegt M auf dem Spiegel von AB, soll M von den Punkten A und B den gleichen Abstand haben. Liegt M auf dem Spiegel von BC, soll M von den Punkten B und C den gleichen Abstand haben. Läge M nun nicht auf dem Spiegel von AC, zeigte unsere schöne Spiegelung einen Widerspruch.

Wir unterbrechen hier zum Luftholen. In der zweiten Hälfte zeigen wir

1. Es ist der Satz von Brianchon, der die Widerspruchsfreiheit der Spiegelung sichert.
2. Ein Kegelschnitt hat 6 Brennpunkte (3 Brennpunktpaare, von denen entweder eins oder alle drei reell sind).
3. Die Brennpunkte entstehen als Beziehung zwischen zwei Kegelschnitten.
4. Die Brennpunkte haben für jedes Kegelschnittpaar — also auch jenseits der euklidischen Geometrie — die drei Grundeigenschaften, die im ersten Abschnitt beschrieben worden sind.
5. Die euklidische Geometrie ist ein Spezialfall, in dem zwei der drei Brennpunktpaare imaginär sind und nur eins in der Zeichenebene sichtbar sein kann.

[5] Der Einfachheit und Anschaulichkeit halber wählen wir immer einen reellen und nicht entarteten Kegelschnitt. Die generellen Aussagen bleiben aber bestehen, wenn man imaginäre Elemente zulässt. Nur lassen sich diese nicht mehr so einfach auf dem Zeichenblatt darstellen. Hier schlägt dann die große Stunde der algebraischen Darstellung in projektiven Koordinaten [5].

Die Relativität der Kegelschnitte

von Stefan Liebscher und Dierck-E-Liebscher

3 Die projektive Spiegelung

Wir haben im ersten Teil die Spiegelung mit Hilfe eines absoluten Kegelschnitts erklärt, der das Unendliche darstellen soll und der bei Spiegelungen auf sich selbst abgebildet werden muss.

Für diese nichteuklidische Spiegelung ist es der Satz von Brianchon, der die Widerspruchsfreiheit sichert (Abb. 12). **Die Diagonalen eines dem Kegelschnitt umschriebenen Sechsseits schneiden sich in einem Punkt.**[6]

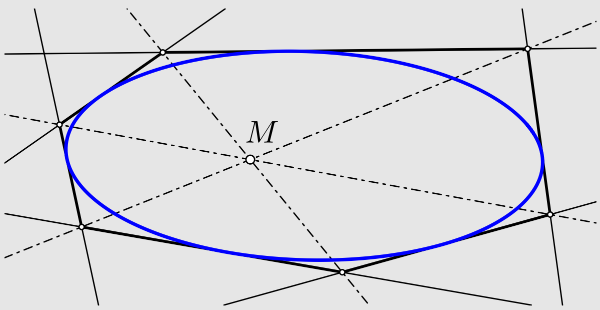

Abbildung 12: Satz von Brianchon. I. Die Diagonalen eines dem Kegelschnitt umschriebenen Sechsseits treffen sich in einem Punkt.

Wir zeigen in Abbildung 13, wie der Satz von Brianchon zu unserem Mittelsenkrechtenschnittpunkt führt.[7] Wir konzentrieren uns nun auf die drei schattierten Vierseite. Jedes enthält zwei Punkte des Dreiecks und eine der Diagonalen des Sechsecks. Diese Situation ist mit derjenigen der gewohnten Spiegelung verwandt (Abb. 11). Wir müssen nur die Regel der gleichen Winkel durch die Regel des Tangententauschs ersetzen. Mit dieser Regel werden die Diagonalen des Sechsseits in Abb. 13 zu Spiegeln, die die Punkte des Dreiecks ABC ineinander abbilden, d.h. die Diagonalen sind die neuen Mittelsenkrechten der Dreiecksseiten.

Es ist dies nicht der Platz, explizit und axiomatisch herzuleiten, wie der absolute Kegelschnitt die sich ergebende Geometrie bestimmt. (Die von Lobatschewski, Gauß und Bolyai gefundene Geometrie entspricht den inneren Punkten des absoluten Kegelschnitts.) Der aufmerksame Leser hat ohnehin bemerkt, dass wir nur Spiegelbilder von Punkten außerhalb des absoluten Kegelschnitts konstruiert haben. Für einen inneren Punkt wird es verwickelter: Wir helfen uns mit zwei Geraden, die durch solch einen Punkt gehen, und mit je zwei äußeren Punkten die wir für beide Geraden finden können.

[6] Der Satz von Brianchon ist dual zum Satz von Pascal, der feststellt, dass die **Schnittpunkte** gegenüberliegender **Seiten** eines **einbeschriebenen** Sechsecks **kollinear** sind, d.h. dass sie auf einer Geraden liegen. Die beiden Sätze sind zwei Seiten einer Medaille [5], das ist aber hier nicht unser Thema.

[7] Der aufmerksame Leser wird bemerken, dass man verschiedene Sechsseite wählen kann. Der Satz von Brianchon liefert für alle diese Fälle entsprechende Schnittpunkte.

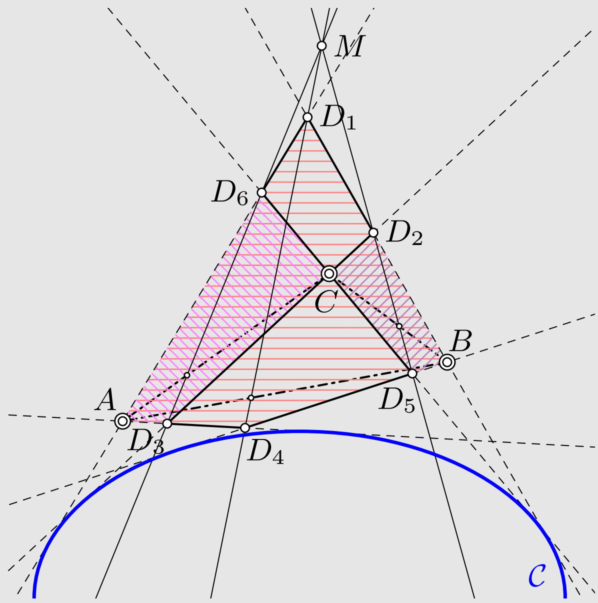

Abbildung 13: Satz von Brianchon. II. Gegeben ist ein Dreieck ABC und der absolute Kegelschnitt $\mathcal{C}$. Zuerst ziehen wir die drei Tangentenpaare an den Kegelschnitt (gestrichelte Linien). Danach wählen wir auf diesen Tangenten ein Sechsseit (dicke Linien). Wir benennen sechs aufeinander folgende Punkte $D_1, ..., D_6$ und ziehen die Diagonalen D_1D_4, D_2D_5 und D_3D_6 (volle Linien). Sie schneiden sich nach dem Satz von Brianchon in einem Punkt, M. Die Diagonalen sind die Mittelsenkrechten der Dreieckseiten, sofern der absolute Kegelschnitt $\mathcal{C}$ die Spiegelungen bestimmt.

Die Spiegelung bestimmt, was orthogonal, senkrecht ist. Zwei Geraden stehen senkrecht aufeinander, wenn die Spiegelung an der einen die andere auf sich selbt abbildet. Die Verbindung eines Punktes mit seinem Spiegelbild nennen wir senkrecht auf dem Spiegel. In Abbildung 13 stehen die Seiten des Dreiecks auf den Diagonalen des Sechsseits senkrecht, die sich dann im Punkt M schneiden. **In einem Vierseit aus Tangenten an den absoluten Kegelschnitt stehen die Diagonalen aufeinander senkrecht.**[8]

Die drei Punkte ABC können auch auf einer Linie liegen. Tatsächlich schneiden sich dann **alle** Lote einer Geraden g in einem Punkt. Dieser Punkt muss der Pol $P[g]$ der Geraden g am absoluten Kegelschnitt sein. Spiegeln wir an einer Lotrechten, wird die Gerade auf sich selbst abgebildet. Ihre Schnittpunkte mit dem absoluten Kegelschnitt tauschen die Plätze, die Tangenten dort tauschen die Plätze, also muss die Lotrechte durch ihren Schnittpunkt P gehen. Der Pol einer jeden solchen Lotrechten muss seinerseits auf der Ausgangsgeraden liegen, die wir also mit Fug und Recht Polare des Punktes P nennen.[9]

Wir haben diese Polarität zwischen Punkten und Geraden auf dem Weg zur Definition von Spiegelungen gefunden, und sie ist das einfachere Konzept. Sie ist das Werkzeug,

[8] Auf den Orts-Zeit-Diagrammen der speziellen Relativitätstheorie [2] erscheint dies als Vierseit aus Lichtsignalspuren (Lichteck).

[9] Insbesondere lässt eine Geradenspiegelung nicht nur alle Punkte des Spiegels, sondern auch seinen Pol am absoluten Kegelschnitt fest. Jede Geradenspiegelung ist auch eine Punktspiegelung. Im Euklidischen fällt das nicht auf, weil stets einer der Partner (bei Geradenspiegelungen der Pol, bei Punktspiegelungen die Polare) im Unendlichen liegt.

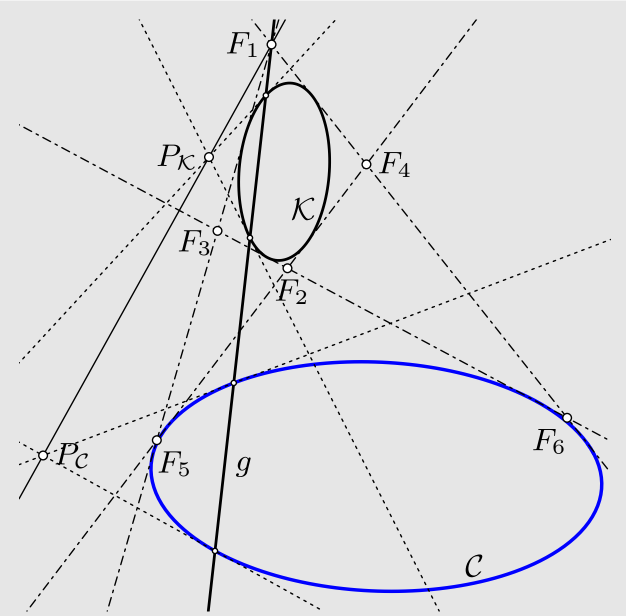

Abbildung 14: Ein Kegelschnittpaar mit vier reellen Tangenten. I. Die strichpunktierten Linien sind die gemeinsamen Tangenten. Die volle Linie ist eine Sehne g durch einen Brennpunkte F. Die beiden Pole ($P_\mathcal{K}$ und $P_\mathcal{C}$) von g liegen mit F auf einer Linie. Soll einer der Kegelschnitte, sagen wir $\mathcal{C}$, die Spiegelungen definieren, dann sind die Linien durch $P_\mathcal{C}$ senkrecht auf g, also auch die Gerade $[P_\mathcal{K}, P_\mathcal{C}, F]$.

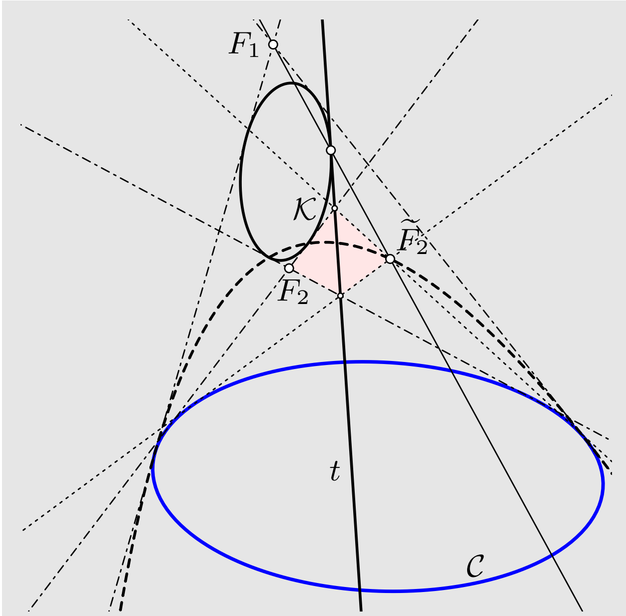

Abbildung 15: Ein Kegelschnittpaar mit vier reellen Tangenten. II. Ziehen wir irgendeine Tangente t an einen der Kegelschnitte ($\mathcal{K}$) und konstruieren die Spiegelung eines Brennpunkts F_2 an dieser Tangente, wobei wir den anderen Kegelschnitt ($\mathcal{C}$) als absolut benutzen. Das Spiegelbild $\widetilde{F_2}$, der Berührpunkt der Tangente und der gegenüberliegende Brennpunkt F_1 liegen auf einer Linie. Deshalb wird der Strahl von F_2 zum Berührpunkt in diesen gegenüberliegenden Brennpunkt F_1 gespiegelt. Die Spiegelung — wenn sie für alle Tangenten des Kegelschnitts $\mathcal{K}$ konstruiert wird — erzeugt eine Kurve von Bildpunkten (gestrichelte Linie). Die Kurve geht durch die Berührpunkte der Tangenten in F_1 an $\mathcal{C}$ und muss auch diese Tangenten berühren. Also ist sie ein Kreis zu $\mathcal{C}$ um F_1. Das ist die Gärtner-Regel für diesen allgemeinen Fall.

mit dem wir die Spiegelungen bestimmen. Wenn wir einen Kegelschnitt als absolut auszeichnen, um mit seiner Hilfe Spiegelungen zu konstruieren, dann bestimmt die Polarität an diesem Kegelschnitt die sich ergebenden geometrischen Beziehungen.[10]

4 Brennpunkte

Wenn wir die Brennpunkte eines Kegelschnitts $\mathcal{K}$ suchen, benötigen wir einen zweiten ($\mathcal{C}$), der Abstände, Winkel und Senkrechtstehen bestimmt, auf den sich Abstände, Winkel und Senkrechtstehen beziehen. Ist ein solcher absoluter Kegelschnitt $\mathcal{C}$ bestimmt, dann schneiden sich die Lote einer Geraden g in deren auf $\mathcal{C}$ bezogenen Pol $P_\mathcal{C}[g]$. Dieser Pol ist also der Fernpunkt der Senkrechten auf g. Als erste Eigenschaft eines Brennpunkts hatten wir festgelegt, dass das aus dem Pol $P_\mathcal{K}[s]$ auf eine Sehne s durch den Brennpunkt gefällte Lot den Brennpunkt selbst trifft. Das heißt nun, dass ein Brennpunkt von $\mathcal{K}$ mit den zwei Polen $P_\mathcal{C}[g]$ und $P_\mathcal{K}[g]$ auf einer Linie liegen muss.

Diese Aussage macht zwischen beiden Kegelschnitten keinen Unterschied. Es ist unerheblich, auf welchen der beiden Kegelschnitte wir uns beziehen wollen. Brennpunkte sind Eigenschaften von Kegelschnittpaaren, nicht eines einzelnen Kegelschnitts.

Sehen wir uns nun eine Sehne durch den Brennpunkt an, die Tangente an den Kegelschnitt ist.[11] Der Pol einer Tangente ist aber der Berührpunkt. Nun muss auch der Pol bezüglich des anderen auf dieser Tangente liegen: Auch der andere Kegelschnitt wird von ihr berührt. Brennpunkte müssen auf gemeinsamen Tangenten liegen. Sie sind die Schnittpunkte der gemeinsamen Tangenten.

Zwei Kegelschnitte haben vier gemeinsame Tangenten (nicht unbedingt reelle), und die Brennpunkte sind die sechs Ecken des von diesen Tangenten gebildeten Vierseits.

Den Fall vierer reeller Tangenten zeigt Abbildung 14. Das Vierseit der gemeinsamen Tangenten hat sechs Ecken, die alle sechs Brennpunkte sind. Zieht man durch einen dieser Brennpunkte eine Gerade g, dann liegt der Brennpunkt mit den beiden Polen $P_\mathcal{C}[g]$ und $P_\mathcal{K}[g]$ dieser Geraden auf einer Linie.

Merkwürdigerweise finden wir auch die zweite Eigenschaft. Wenn einer der beiden Kegelschnitte die Spiegelungen definiert, wird jede Gerade durch jeden Brennpunkt an den Tangenten des anderen Kegelschnitts in eine Ge-

[10] Der Pol einer Geraden g, die den Kegelschnitt $\mathcal{K}$ schneidet, ist einfach zu finden, weil Schnittpunkte und Tangenten reell sind. Ebenso finden wir einfach die Polare eines Punktes außerhalb des Kegelschnitts. Schneidet die Gerade den Kegelschnitt nicht, oder liegt der Punkt innerhalb des Kegelschnitts, dann sind Schnittpunkte und Tangenten nicht mehr reell. Allerdings sind sie konjugiert komplex und haben wieder reelle Verbindungen bzw. Schnitte. Zur Konstruktion benutzt man, dass der Pol einer Verbindung zweier Punkte Q_1 und Q_2 der Schnittpunkt der beiden Polaren $p[Q_1]$ und $p[Q_2]$ ist.

[11] In der gewohnten Geometrie sind diese Sehnen konjugiert komplex, also unsichtbar.

rade durch den gegenüberliegenden Brennpunkt gespiegelt (Abb. 15).

5 Kreise

Tatsächlich erhalten wir auch die Gärtner-Regel. Wir müssen uns jedoch vorher ansehen, woran wir nun einen Kreis erkennen können. Wie in der gewohnten Geometrie sollte ein Kreis entstehen, wenn zwei gegenüberliegende Brennpunkte in einem Punkt M zusammenfallen. Dann sind die vier Tangenten zwei Doppelgeraden durch M, und ein weiteres Brennpunktpaar rückt in diesen nun vierfachen Punkt. Die beiden übrigbleibenden Brennpunkte werden zu den Berührpunkten der beiden Doppeltangenten. Abbildung 16 zeigt den reellen Fall.

Sehen wir uns also zwei Kegelschnitte an, die sich in zwei Punkten berühren. Der Schnitt M der gemeinsamen Tangenten wird der Mittelpunkt des Paars. Ziehen wir eine Gerade durch M und betrachten wir sie als Spiegel. Welchen der beiden Kegelschnitte wir auch als absoluten benutzen, die Doppeltangenten müssen ineinander gespiegelt werden und Doppeltangenten bleiben. Da die Punkte auf dem Spiegel an ihrem Platz bleiben, verändern sich die Kegelschnitte nicht. Jeder Kegelschnitt ist — bezogen auf den anderen — symmetrisch an den Geraden durch den Mittelpunkt. **Zwei Kegelschnitte sind Kreise zueinander, wenn sie sich in zwei Punkten berühren. Ihr Mittelpunkt ist der Schnittpunkt der Tangenten in diesen Punkten.** Kreis zu sein wird eine symmetrische Relation. Die Schar der Kegelschnitte mit den zwei Doppeltangenten ist eine Schar konzentrischer Kreise. Alle Kegelschnitte der Schar sind Kreise zueinander mit dem Mittelpunkt M.

Wenden wir uns schließlich der Spiegelung eines Brennpunktes an den Tangenten des einen Kegelschnitts zu, wenn der andere die Spiegelungen definiert. Wir erhalten einen Kreis um den gegenüberliegenden Brennpunkt. Das komplettiert die Erwartungen an die Eigenschaften der Brennpunkte (Abb. 15).

6 Ausblick

Brennpunkte sind für Kegelschnittpaare bestimmt. Es sind sechs, aber sie sind nicht notwendig alle reell oder alle verschieden, und es sind die Ecken des Vierseits der gemeinsamen Tangenten. Konfokale Kegelschnitte bilden eine Schar mit vier festen Tangenten (Abb. 17). Eine solche Schar hat die folgenden Eigenschaften:

1. Ziehen wir eine beliebige Gerade g durch einen beliebigen Brennpunkt F, so liegen die Pole zu den Kegelschnitten der Schar auf einer Geraden h.
2. Diese Linie h steht senkrecht auf der Geraden g, unabhängig davon, welcher der Kegelschnitte der absolute sein soll, der die Spiegelung bestimmt.
3. Die Spiegelbilder eines Brennpunkts in den Tangenten eines jeden der Kegelschnitte liegen auf einer Linie mit dem jeweiligen Berührpunkt und dem gegenüberliegenden Brennpunkt, unabhängig davon, welcher der Kegelschnitte der absolute sein soll, der die Spiegelung bestimmt.

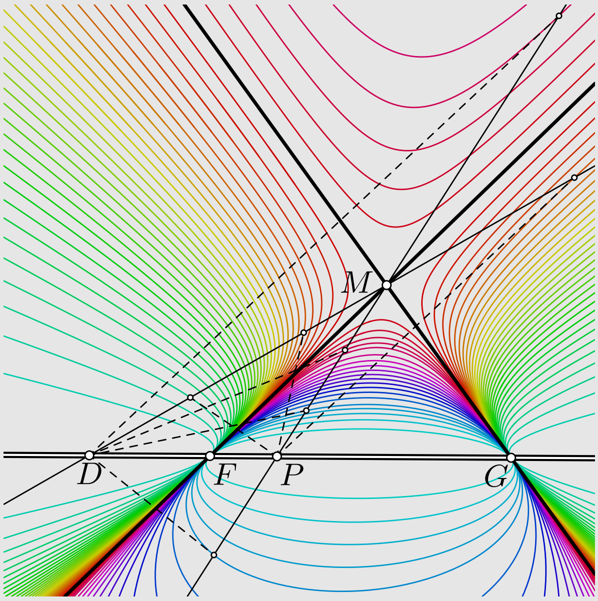

Abbildung 16: Eine Schar konzentrischer Kreise. Die Schenkel FM, GM des Dreiecks MFG sind doppelte Tangenten. Der Punkt M ist das zusammenfallende Quadrupel der Brennpunkte. Jede Gerade MD durch den Mittelpunkt ist ein Durchmesser für alle Kegelschnitte der Schar. Die Pole eines Durchmessers fallen alle auf FG zusammen (in P), und die Linie MP ist lotrecht zu MD. Die Pole zu MP fallen alle in D. Der Durchmesser MD ist lotrecht zu MP, unabhängig davon, welcher der Kegelschnitte der Schar zum absoluten Kegelschnitt erklärt wird. FG teilt DP harmonisch.

4. Die Spiegelbilder eines Brennpunkts in einem beliebigen Kegelschnitt der Schar formen einen Kreis um den gegenüberliegenden Brennpunkt, unabhängig davon, welcher der Kegelschnitte der absolute sein soll, der Spiegelung bestimmt und Kreise entscheidet.

Wieso kommen wir in der gewohnten Geometrie ohne zweiten Kegelschnitt aus? Wir haben einen Stellvertreter, den Zirkel. Auch in der gewohnten Geometrie gibt es einen absoluten Kegelschnitt. Er wird durch den Zirkel vertreten, mit dem wir Spiegelungen einfach konstruieren. Der absolute Kegelschnitt selbst ist unsichtbar, entartet. Er besteht aus einer Doppelgeraden im Unendlichen (dem Horizont der perspektiven Darstellungen) mit zwei imaginären (konjugiert komplexen) absoluten Brennpunkten, in denen sich die Kreise jeder konzentrischen Schar berühren. Von den drei Brennpunktpaaren eines Kegelschnitts ist dann auch noch ein zweites komplex, nur eines ist reell: Es ist das bekannte.

In der pseudoeuklidischen Geometrie der speziellen Relativitätstheorie [3] ist der absolute Kegelschnitt immer noch die Doppelgerade im Unendlichen, aber die absoluten Brennpunkte sind reell. Es sind die Fernpunkte der Weltlinien der Lichtsignale. Ein Kegelschnitt hat nun darüber hinaus noch zwei Brennpunktpaare, die entweder beide reell oder beide komplex sind. Im letzteren Fall hat der Kegelschnitt überhaupt keinen im Endlichen sichtbaren Brennpunkt.

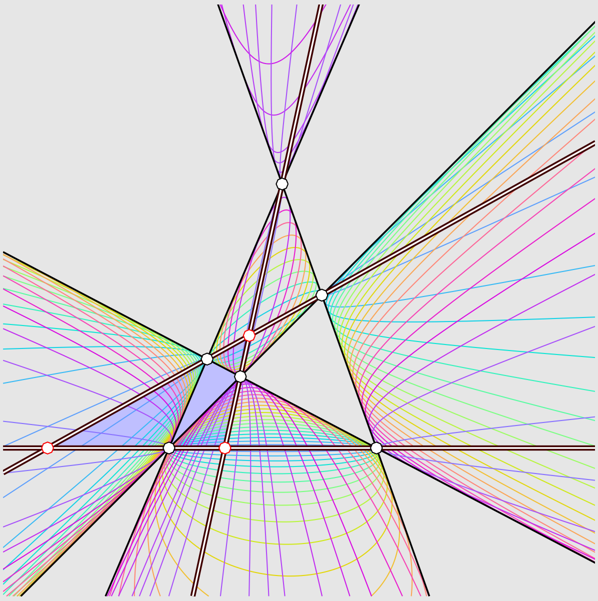

Abbildung 17: Eine Schar konfokaler Kegelschnitte mit reellen gemeinsamen Tangenten. Die Doppellinien sind die drei Diagonalen des Tangentenvierseits und zeigen die entarteten Kegelschnitte der Schar. Das Diagonaldreiseit ist zu sich selbst polar: Der Pol einer Seite ist die gegenüberliegende Ecke, unabhängig davon, wessen Kegelschnitts Polarität benutzt wird. Das Diagonaldreiseit ist auch selbstdual: Betrachtet man das Viereck der Schnittpunkte zweier Kegelschnitte, fallen dessen drei Diagonalpunkte mit den Ecken des Diagonaldreiseits zusammen.

Wenn wir einen reellen nicht entarteten absoluten Kegelschnitt wählen, wird sein **Inneres** zur berühmten, von Lobatschewski, Bolyai und Gauß gefundenen nichteuklidischen Geometrie. Felix Klein benutzte einen gewohnten Kreis ähnlich zu dem, den Maurits Escher in seinen Graphiken verewigt hat. In dieser Geometrie gibt es kein Rechteck: Die Winkelsumme in einem Viereck ist immer kleiner als der Vollwinkel. Die nichteuklidische Ebene ist (negativ) gekrümmt. Ellipsen in Inneren haben zwei reelle Brennpunkte.

Die **Außenregion** des absoluten Kegelschnitts stellt eine Orts-Zeit-Karte der deSitter-Welt dar, die eine besondere Rolle in der Kosmologie spielt [4]. Diese hat ebenfalls Krümmung, enthält aber auch Linien der Länge Null, nämlich die Tangenten an den absoluten Kegelschnitt. Das sind wieder die Weltlinien der Lichtsignale, die wir aus der speziellen Relativitätstheorie kennen.

Zurückgehend auf das von Felix Klein vorgelegte **Erlanger Programm** bestimmt der absolute Kegelschnitt die Einbettung der metrischen Geometrie in die projektive Ebene und offenbart, dass die grundlegenden Begriffe Kreis oder Brennpunkt relative Eigenschaften zwischen Kegelschnitten sind.

Literatur

[1] F. Bachmann (1959): Der Aufbau der Geometrie aus dem Spiegelungsbegriff, Springer, Heidelberg

[2] z.B. Metzler (2007): Physik Sekundarstufe II, 4. Auflage.

[3] D.-E. Liebscher (1977): Relativitätstheorie mit Zirkel und Lineal, Akademie-Verlag Berlin. The Geometry of Time, Wiley-VCH, Weinheim 2005.

[4] D.-E. Liebscher (2010): Jenseits des Unendlichen, Der mathematisch-naturwissenschaftliche Unterricht 63/6, 336-339.

[5] J. Richter-Gebert (2011): Perspectives on Projective Geometry, A Guided Tour Through Real and Complex Geometry, Springer, XXII, 571p. 380 illus., 250 illus. in color.

[6] J. Steiner: Die geometrischen Konstructionen, ausgeführt mittelst der geraden Linie und eines festen Kreises, als Lehrgegenstand auf höheren Unterrichts-Anstalten und zur praktischen Benutzung. Ferdinand Dümmler, Berlin 1833.