

Die Liebe zu den drei Ellipsen

Dierck-E.Liebscher, Potsdam

Dieser Beitrag soll auf projektive und nichteuklidische Geometrie neugierig machen. Wer weiß schon, dass alle Kreise der euklidischen Ebene eine gemeinsame Sehne haben oder dass eine Ellipse sechs Brennpunkte besitzt?

1 Drei Ellipsen um drei Brennpunkte

1987 brachte mein Sohn von der Vorbereitung für die Mathematikolympiade eine Aufgabe mit, deren Einfachheit und Schönheit mich immer wieder verblüfft und anzieht. Diese Aufgabe ist schon des öfteren behandelt worden, meiner Kenntnis nach immer im Rahmen der euklidischen Geometrie. Sie ist aber auch in der nicht-euklidischen Geometrie lösbar. E.H.Neville, der die Aufgabe 1936 vorstellte [1], zeigte den euklidischen Beweis, führte seine Bemerkung über den nichteuklidischen Fall aber nicht aus [2]. Der Weg zu diesem Beweis lüftet den Schleier, der die nichteuklidische Geometrie verhüllt, führt vor Augen, was in der euklidischen Geometrie verborgen bleibt, weil es sich dort im unendlich Fernen oder im Imaginären abspielt, zeigt etwas von den Techniken der projektiven Geometrie und gibt vielen verblüffenden Groschen die Möglichkeit zu fallen. Deshalb wird er hier vorgestellt. Ausführliche Rechnungen finden sich im Netz [6].

Es geht zunächst um drei Ellipsen, die sich drei Brennpunkte teilen. Zwei Ellipsen haben dann maximal zwei reelle Schnittpunkte miteinander und bestimmen eine gemeinsame Sehne. Was so verblüffend ist: Die drei Sehnen sind konkurrent, sie gehen durch einen gemeinsamen Punkt (Abb. 1). Der Beweis, den ich erst nach vier Stunden im Liegestuhl gefunden hatte, findet sich ähnlich bei Neville [1]: Man erinnert sich zuerst an die Eigenschaft der Ellipsenpunkte, ein festes Abstandsverhältnis zu einem Brennpunkt und seiner zugeordneten Leitgeraden (Directrix) zu halten (Abb. 2). Wir erhalten eine einfache Gleichung für die gemeinsame Sehne zweier Ellipsen, die den Brennpunkt gemeinsam, aber jeder seine eigene Leitlinie haben. Die drei Paarungen führen auf drei Sehnen, die alle durch eine solche Gleichung beschrieben werden. Man muss nur zeigen, dass die drei Geraden durch einen Punkt gehen. Weil vielleicht ein Leser die Lösung selbst suchen möchte, findet man sie besonders auf Seite 9 ■■■■.

2 Die projektive Sicht

Schnittpunktsätze für gerade Linien bieten immer die Chance, von den metrischen Voraussetzungen der euklidischen Geometrie unabhängig zu sein und einen Hintergrund zu haben, der nur projektive Eigenschaften voraussetzt.

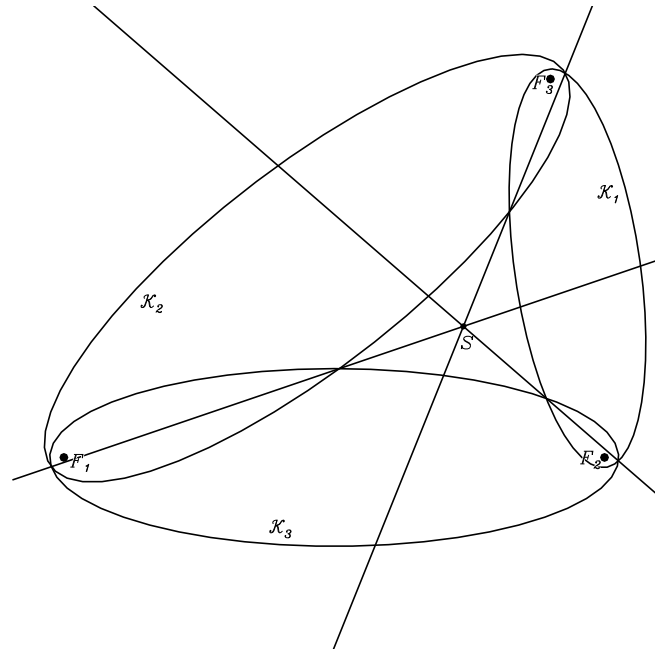


Abbildung 1: Der Ausgangspunkt

Und wenn Längen und Winkel eine Rolle spielen, dann müssen sie nicht unbedingt die euklidischen Eigenschaften haben, die beispielgebend vom Satz des Pythagoras dargestellt werden. Das heißt aber, die Schnittpunktsätze sollten dann auch in der nichteuklidischen Geometrie gelten, wie sie von Lobachevski, Gauß und Bolyai konstruiert worden ist.¹

Aus projektiver Sicht sind Parabeln und Hyperbeln genau so gut wie Ellipsen. Sie unterscheiden sich nur durch ihre Beziehung zum unendlich Fernen. Sieht man sich nun drei Hyperbeln an, die sich drei Brennpunkte teilen, erkennt man als erstes, dass jeweils zwei dieser Hyperbeln bereits vier reelle Schnittpunkte und sechs reelle gemeinsame Sehnen haben können. Zwei dieser Sehnen schneiden sich im Schnittpunkt der zum gemeinsamen Brennpunkt gehörenden Leitlinien. Dieses Sehnenpaar interessiert uns hier. Die drei Hyperbelpaarungen erzeugen so drei solcher Sehnenpaare. Zwölf Schnittpunkte kann es bei drei Geradenpaaren geben. Es sind hier aber nur vier (Abb. 3).

Zwei Kegelschnitte bestimmen 4 Schnittpunkte. Haben sie einen gemeinsamen Brennpunkt, passieren von den 6 gemeinsamen Sehnen zwei den Schnittpunkt der entsprechenden Leitlinien. Drei brennpunktteilende Kegelschnitte bestimmen drei solche Sehnenpaare. Diese Sehnen sind die sechs Seiten eines Vierecks.

Warum gibt es bei den drei Ellipsen nur einen Schnitt-

¹Der Satz, dass sich die drei Höhen eines Dreiecks in einem Punkt schneiden, kann unmittelbar als Axiom für die Erweiterungen der euklidischen Geometrie gelten, die hier angesprochen werden.

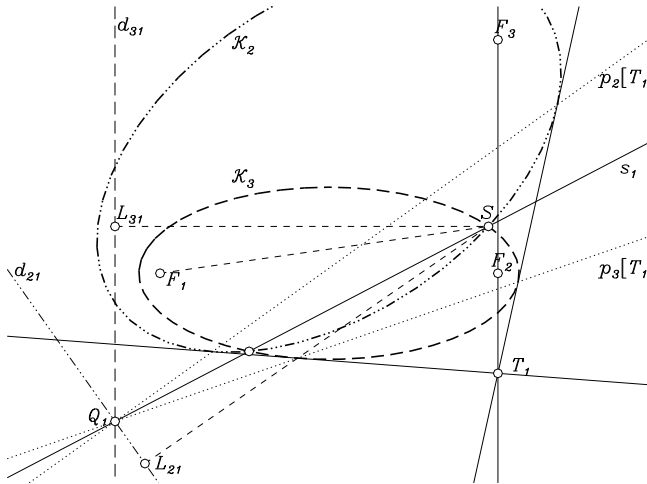


Abbildung 2: Zwei Ellipsen mit einem gemeinsamen Brennpunkt

punkt gemeinsamer Sehnen? Wir haben einfach nur die Sehnen berücksichtigt, die die Ellipsen in reellen Punkten schneiden. Wir werden sehen, dass man bei der Berechnung der Koordinaten der Schnittpunkte im wesentlichen quadratische Gleichungen zu lösen hat, die nicht nur reelle Lösungen haben. Bei der Berechnung der Verbindungslinien kann der komplexe Charakter aber wieder verschwinden. Sehnen können deshalb auch dann reelle Gleichungen haben, wenn ihr Schnittpunkte mit den Kegelschnitten komplexe Koordinaten haben [6]. Das ist hier der Fall. Mit den zusätzlichen Sehnen entsteht auch hier das volle Bild (Abb. 4). Das Sehnenpaar, das in den Abb. 3 und 4 zu den Sehnen Schnittpunkten führt, ist immer reell.

3 Punkte und Geraden

Wir sind daran gewöhnt, die Punkte der Ebene mit zwei Koordinaten $Q = [x, y]$ zu identifizieren. Cartesische Koordinaten spannen dann ein rechtwinkliges Netz über der Ebene und erlauben die Darstellung von Geraden durch lineare Gleichungen, etwa

$$ax + by + c = 0. \tag{1}$$

Die Geraden werden so durch ein Tripel $g = [a, b, c]$ beschrieben. Dieses Tripel ändert seine Bedeutung nicht, wenn alle drei Zahlen mit dem gleichen Faktor multipliziert werden: Die Gerade bleibt immer noch dieselbe. g und $\lambda g = [\lambda a, \lambda b, \lambda c]$ führen in Gleichung (1) auf die gleichen Lösungen. Wenn das mit den Punkten auch so gehen soll, geben wir ihnen noch eine dritte Koordinate und schreiben $P = \lambda[x, y, 1] = [\xi, \eta, \zeta]$. Diese Koordinaten heißen homogene Koordinaten. Die gewohnten ergeben sich durch $x = \xi/\zeta$ und $y = \eta/\zeta$. Sind zwei Tripel proportional, beschreiben sie den gleichen Punkt, so

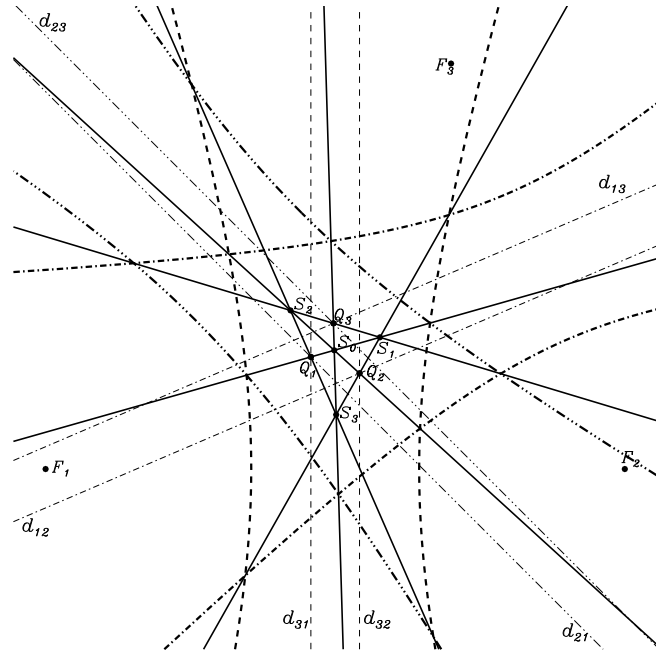


Abbildung 3: Drei brennpunktteilende Hyperbeln mit dem Viereck der Sehnen Schnittpunkte
Wir wählen drei Hyperbeln mit genügend großer Exzentrizität, damit die 12 Schnittpunkte und 36 Sehnen reell werden.

wie die Tripel g und λg schon vorher die gleiche Gerade bezeichnet haben. Nun kann man sich auf die lineare Algebra des dreidimensionalen Raumes stützen [6].

Zunächst sind alle nichtentarteten Dreiecke auf der Ebene kongruent. Seien drei solche Punkte P_k gegeben und drei andere S_i , dann gibt es eine projektive Abbildung T mit der $T[P_k] = S_k$ wird. Es kann also kein Längen- oder Winkelmaß geben. Solche Maße entstehen erst, wenn man Paare von Punkte oder Geraden mit dem Doppelverhältnis aufeinander beziehen kann [4, 6]. Ein besonderer Bezug ist die harmonische Teilung. Sie findet sich am einfachsten im vollständigen Viereck bzw. im vollständigen Vierseit (Abb. 5): Ein Viereck (links, volle Punkte) hat sechs Seiten und drei Diagonalpunkte (hohle Punkte). Die Seitenpaare ohne gemeinsamen Eckpunkt schneiden sich in einem Diagonalpunkt und werden von den beiden anderen harmonisch geteilt. Ein Vierseit (rechts, ausgezogene Linien) hat sechs Eckpunkte und drei Diagonalen (gestrichelt). Die Verbindung von Eckenpaaren, die nicht auf einer gemeinsamen Seite liegen, ist eine Diagonale. Das Eckenpaar wird von den beiden anderen Diagonalen harmonisch geteilt.

Wenn Längen und Winkel noch keine Rolle spielen, sind die Beziehungen zwischen Geraden- und Punktepaaren das zentrale Thema. Dieser Teil der Geometrie ist die projektive Geometrie. Wie wir gleich sehen werden, macht sie das Unendliche sichtbar.

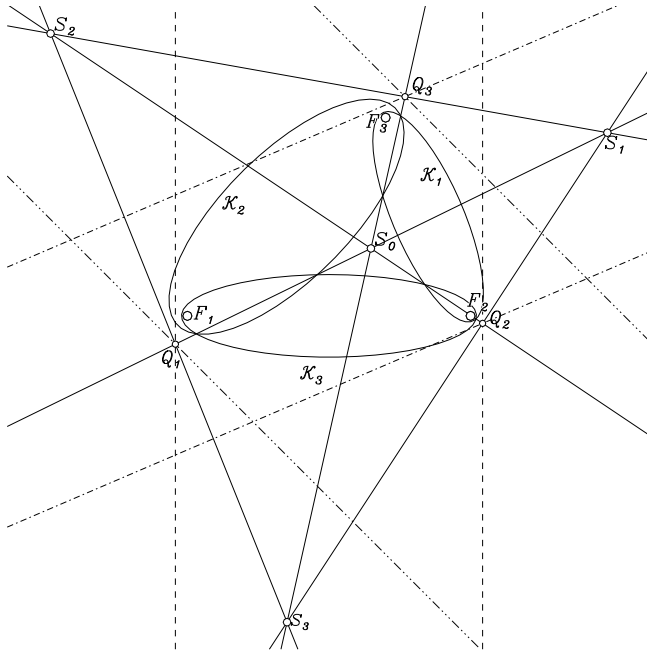


Abbildung 4: Drei brennpunkteilende Ellipsen mit dem Viereck der Sehnenschnittpunkte

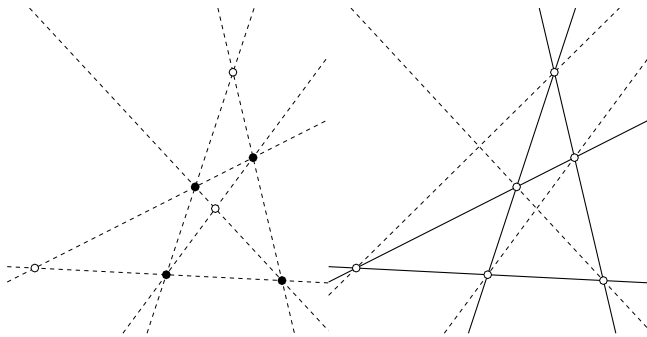


Abbildung 5: Harmonische Teilung in Viereck und Vierseit

4 Unendlich fern

Wir sind gewohnt zu akzeptieren, dass es zu einer Geraden durch einen abseits liegenden Punkt genau eine Parallele gibt, d.h. eine zweite Gerade, die die erste nicht schneidet. Das ist das Parallelenaxiom der euklidischen Geometrie. Weil nun aber die Voraussetzung, zwei Geraden haben immer einen Schnittpunkt, sehr produktiv verwendet werden kann, setzen wir etwas hinzu, das wir das Unendliche nennen, und siedeln den Schnittpunkt der Parallelen dort an. Wenn wir mit Punkten und Geraden nach einheitlichen Regeln hantieren wollen, zeigt es sich, dass das Unendliche als Gerade, eben als die Ferngerade angesehen werden muss. Projiziert auf ein Gemälde erscheint sie denn auch immer als gerader Horizont. Von jedem Punkt einer Geraden ist es bis zum Unendlichen, bis zum Schnittpunkt mit der Ferngeraden, unendlich weit. Ellipsen und Kreise schneiden die Ferngerade nicht, zumindest nicht in reellen Punkten, wohl

aber Hyperbeln. Deren Schnittpunkte mit der Ferngeraden definieren die Asymptoten der Hyperbel.

Kann man eine Geometrie aus Geraden und Punkten und Spiegelungen konstruieren, in der das Parallelenaxiom nicht gilt, in der es zu einem Punkt abseits einer Geraden mehrere Geraden gibt, die diese im Endlichen nicht schneiden? Das war zweitausend Jahre lang eine offene Frage. Lobachevski, Gauss und Bolyai haben vor etwa 200 Jahren unabhängig voneinander eine solche Geometrie gefunden, die seitdem nichteuklidische Geometrie heißt.² Das anschaulichste Bild und die einfachsten Rechenmethoden für diese Geometrie liefert das nach Felix Klein benannte Modell.³ Alle Geraden haben das gewohnte Aussehen, das Unendliche erweist sich nun aber als Kegelschnitt, der absoluter Kegelschnitt genannt wird und der am einfachsten in der Form eines Kreises dargestellt wird.

Wir lernen bereits in der gewohnten Geometrie, dass alle Kongruenz (d.h. aller Vergleich von Längen und Winkeln) auf Spiegelungen basiert, die zu Drehungen und Verschiebungen zusammengesetzt werden. Wie Spiegelungen konstruiert werden müssen, bestimmt der absolute Kegelschnitt [3].

5 Kegelschnitte

Kegelschnitte sind Kurven, die mit jeder Geraden zwei Schnittpunkte haben. Diese Schnittpunkte können nicht immer reell sein, und sie können auch zusammenfallen (dann ist die Gerade eine Tangente). Damit sind die Schnittpunkte wie alle Punkte des Kegelschnitts Lösungen quadratischer Gleichungen, die wir in homogenen Koordinaten in der Form

$$(Q, kQ) = 0 \tag{2}$$

schreiben können.⁴ Das Symbol k bezeichnet eine symmetrische Koeffizientenmatrix. Man kann Kegelschnitte auch als Einhüllende ihrer Tangentenmenge ansehen, d.h. einer Geradenmenge, die wiederum einer Gleichung zweiter Ordnung ($tKt = 0$) genügen muss. Die Koeffizientenmatrix K dieser Gleichung ist proportional dem Inversen der ersteren, $Kk \propto 1$.⁵

Wir kennen die Kegelschnitte aus der gewohnten Geometrie als metrische Beziehung zwischen einem Brennpunkt und einer zugeordneten Geraden, der Direktrix. Wir können die Kegelschnitte jedoch ohne direkten Bezug zum Längenmaß beschreiben. Dann wird die Bezie-

²Das ist eine etwas unspezifische Benennung, weil es verschiedene Richtungen gibt, in die man die euklidische Geometrie verändern kann, aber sie meint spezifisch die Lobachevski-Geometrie.

³Dieses Kleinsche Modell der nichteuklidischen Geometrie stellt eine geradentreue Karte derselben dar. Es ist etwas weniger bekannt als die winkeltreue Karte, das Poincaré-Modell, das Maurits Escher künstlerisch dargestellt hat, aber es ist viel einfacher handhabbar.

⁴Der Ausdruck kQ steht für $[kQ]_i = \sum_k k_{ik} Q^k$.

⁵Der Ausdruck Kk steht für $[Kk]_n^l = \sum_m K^{lm} k_{mn}$.

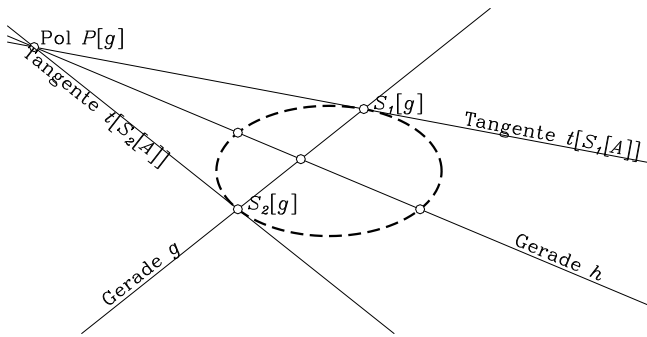


Abbildung 6: Pol, Polare, Polaritaet

hung des Kegelschnitts zu Brennpunkt und Leitlinie zu einer grundlegenden Vermittlung zwischen Punkten und Geraden, die Polarität genannt wird. Von einem Punkt Q lassen sich an einen Kegelschnitt \mathcal{K} zwei (nicht immer reelle) Tangenten ziehen. Die Verbindungsgerade der (nicht immer reellen) Berührungspunkte ist aber immer reell und heißt Polare $p[Q]$ des Punktes Q am Kegelschnitt \mathcal{K} . Umgekehrt schneidet eine Gerade g den Kegelschnitt in zwei (nicht immer reellen) Punkten. Die (nicht immer reellen) Tangenten durch diese Punkte schneiden sich in einem immer reellen Punkt, dem Pol $P[g]$ der Geraden g zum Kegelschnitt \mathcal{K} (Abb.6). Die Polarität von Geraden und Punkten wird nun einfach durch die Matrizenmultiplikation vermittelt: $P_k[g] = Kg$, $p_k[Q] = kQ$. Brennpunkt und Leitlinie eines Kegelschnitts sind Pol und Polare voneinander.

Zunächst sind alle nichtentarteten Kegelschnitte kongruent. Kegelschnitte unterscheiden sich nur in Bezug aufeinander. Deshalb ernennen wir nun einen bestimmten Kegelschnitt zum absoluten Kegelschnitt \mathcal{C} mit den Koeffizientenmatrizen C bzw. c . Seine Ernennung bestimmt nun eine Metrik. Zu jedem Punktepaar schneidet er auf dessen Verbindungsgeraden ein weiteres Paar heraus. Das nun mögliche Doppelverhältnis führt auf ein Entfernungsmaß für die Ausgangspunkte. Ebenso bestimmt der absolute Kegelschnitt zu jedem Geradenpaar ein Tangentenpaar aus dessen Schnittpunkt. Das nun mögliche Doppelverhältnis führt auf ein Winkelmaß für die Ausgangsgeraden. Gemessen mit dem Entfernungsmaß kann man eine Strecke auf einer Geraden beliebig oft abtragen, ohne den absoluten Kegelschnitt zu erreichen. Dieser ist also das (metrisch) Unendliche [3].

Nun können wir ganz allgemein studieren, was im unendlich Fernen so alles geschehen kann. Wiederholen wir: Das Kleinsche Modell der nichteuklidischen Geometrie illustriert den allgemeinsten Fall einer Geometrie, die geradentreue Karten gestattet, in der alle Lote auf einer Geraden durch einen Punkt gehen und in der sich die Höhen jedes Dreiecks in einem Punkt schneiden. Dann ist nämlich die Beziehung zwischen den Geraden und den Trägern ihres Lotenbüschels eine Polarität, die von einem Kegelschnitt vermittelt wird, eben dem absoluten Kegelschnitt. Der absolute Kegelschnitt bestimmt nun un-

mittelbar, dass die Strahlen durch den Pol einer Geraden auf der Geraden senkrecht stehen.

6 Brennpunkte

In der gewohnten Geometrie lernt man die Gärtnerkonstruktion der Ellipse kennen, vielleicht auch die Leitliniendefinition (Abb. 2). Versucht man, diese Definitionen mit dem Abstand zu konstruieren, wie wir vorhin im Abschnitt 3 als Derivat des Doppelverhältnisses kennengelernt haben, erhält man Kurven höherer Ordnung, aber keinen Kegelschnitt, der höchstens zwei Schnittpunkte mit einer Geraden erlaubt. Deshalb müssen wir nach einer projektiven Bestimmung der Kegelschnitte suchen, wenn zwei Brennpunkte oder Brennpunkt und Leitlinie gegeben sind.

Der Kegelschnitt muss unmittelbar über die Polarität definiert werden, wenn die Brennpunkte gegeben sind. Wir halten uns dabei an eine charakteristische Eigenschaft der Sehnen durch den Brennpunkt, die wir aus der euklidischen Geometrie kennen. Verbindet man den Pol $P_k[g]$ einer solchen Sehne g (den Schnittpunkt der durch die Sehne bestimmten Tangenten) mit dem Brennpunkt F , so steht diese Verbindung senkrecht auf der Sehne. Lote auf g sind aber dadurch bestimmt, dass sie durch den Pol $P_c[g]$ der Sehne bezüglich des absoluten Kegelschnitts \mathcal{C} gehen. Für jeden Kegelschnitt \mathcal{K} soll daher gelten: Geht die Gerade g durch einen Brennpunkt F , dann sind F , $P_k[g]$ und $P_c[g]$ kollinear. Wir schreiben mit dem Spatprodukt:⁶

$$gF = 0 \rightarrow [F, P_k[g], P_c[g]] = 0. \tag{3}$$

Damit ist der Kegelschnitt auch in der nichteuklidischen Geometrie bestimmt, wenn die beiden Brennpunkte und ein der Exzentrizität entsprechender Parameter gegeben sind. Wir schreiben mit dem äußeren Vektorprodukt⁷

$$K = C - \mu \frac{F_1 \circ F_2 + F_2 \circ F_1}{\sqrt{(F_1 c F_1)(F_2 c F_2)}} \tag{4}$$

Eine merkwürdige Folge dieser Eigenschaft der Brennpunkte ist, dass Tangenten aus den Brennpunkten an den Kegelschnitt \mathcal{K} auch den absoluten Kegelschnitt \mathcal{C} berühren ($(t, F_1) = 0$ und $(t, Kt) = 0 \rightarrow (t, Ct) = 0$). Für die euklidische Geometrie ist das unvorstellbar: Es gibt keine reellen Tangenten aus einem Brennpunkt an den Kegelschnitt, der absolute Kegelschnitt ist entartet und auch nicht reell. Liegen die beiden Brennpunkte aber außerhalb des absoluten Kegelschnitts (jenseits des Unendlichen [3]), wird alles reell (Abb. 7). Zunächst beginnen wir mit zwei Brennpunkten F_1 und F_2 und ziehen die vier Tangenten an den absoluten Kegelschnitt. Das Tangentenvierseit hat nun 6 Ecken. Drei Eckenpaare liegen

⁶Der Ausdruck $[a, b, c]$ bezeichnet $[a, b, c] = (a, b \times c) = a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - c_1 b_2 a_3 - c_2 b_3 a_1 - c_3 b_1 a_2$.

⁷Der Ausdruck $f \circ g$ bezeichnet $[f \circ g]_{mn} = f_m g_n$.

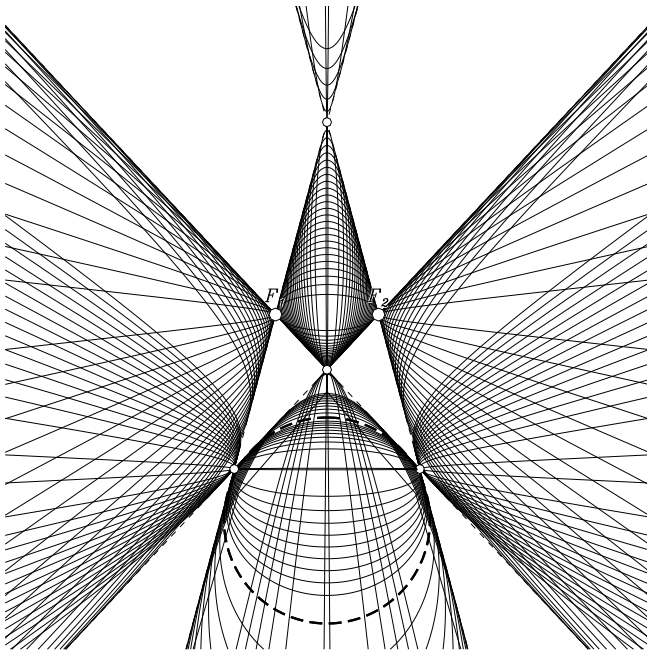


Abbildung 7: Schar von Kegelschnitten zu zwei festen Brennpunkten
 Aus zwei Brennpunkten werden mit den vier (hier reellen) Tangenten an den absoluten Kegelschnitt sechs

diagonal gegenüber, das heißt nicht auf einer der vier Seiten. Alle diese drei Eckenpaare sind zur Konstruktion entsprechend (4) geeignet. Alle sechs Ecken erfüllen für diese Kegelschnitte die Bedingung (3).

Auch wenn sich die euklidische Definition des Kegelschnitts ($\varrho^2[Q, F] - \varepsilon^2 \varrho^2[Q, d] = 0$) als Verhältnis der Abstände zu Brennpunkt und Directrix nicht wörtlich fortsetzen lässt, gibt es eine Darstellung des Kegelschnitts, in dem dieser als Summe zweier entarteter Kegelschnitte erscheint, deren einer sich auf den Brennpunkt F bezieht, während der andere auf die Directrix d baut. Man findet sie in unserem Zusammenhang bei Crawford [5]. Ist der Kegelschnitt nicht entartet, können wir k in

$$k = k_B[F] + k_D[d] = \left(c - \frac{cF \circ cF}{(FcF)} \right) + \left(\frac{1}{\mu} \frac{d \circ d}{dCd} \right) \quad (5)$$

zerlegen. Für sich allein hat $k_B[F]$ in unserem Falle nur einen reellen Punkt, eben den Brennpunkt, und $k_D[d]$ hat als reelle Punkte nur die einer Geraden, eben d . Die Kegelschnittschar für gegebenen Brennpunkt und gegebene Directrix zeigt $K_B[F]$ und $K_D[d]$ als Grenzfälle (Abb. 8). Bedeutung haben die Schnittpunkte der Directrix mit den beiden Asymptoten durch den Brennpunkt: Alle Kegelschnitte der Schar passieren diese Schnittpunkte, und zwar unabhängig von der Lage des zweiten Brennpunkts.⁸

Die Schnittpunkte zweier Kegelschnitte, die sich den Brennpunkt F teilen, liegen auf dem Differenzkegelschnitt

⁸Wenn man $F = F_1$ und $d = kF$ setzt, erhält man durch die Bedingung $Kk = 1$ eine Formel für F_2 als Funktion von F und d .

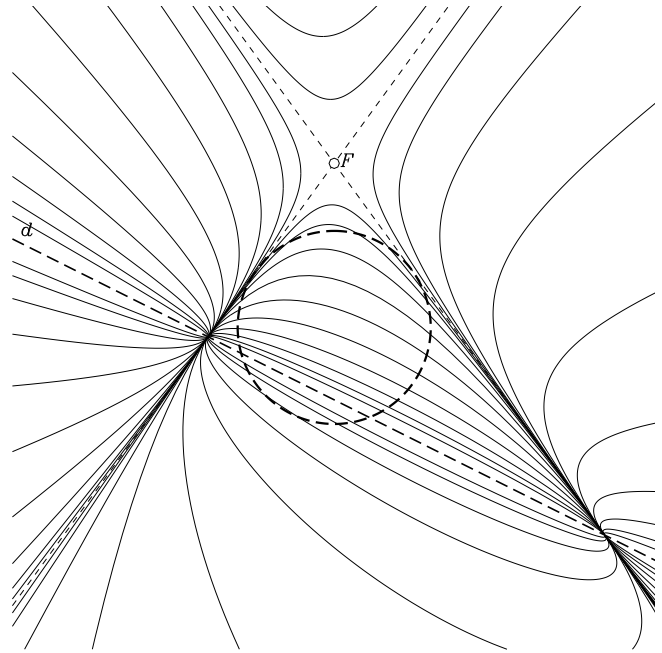


Abbildung 8: Kegelschnittschar mit festem Brennpunkt und zugehöriger Directrix

$k^* = k_D[d_1] - k_D[d_2]$. Dieser besteht nur aus einem Geradenpaar, eben dem Sehnenpaar, das in unserem Schnittpunktsatz auftritt.

Drei Kegelschnitte k_1, k_2 und k_3 , die sich in die Brennpunkte F_1, F_2 und F_3 teilen, führen so auf 3 Sehnenpaare:

$$k_1^* = k_D[d_{21}] - k_D[d_{31}], \quad k_2^* = k_D[d_{32}] - k_D[d_{12}]$$

$$\text{und } k_3^* = k_D[d_{13}] - k_D[d_{23}].$$

Nun haben die Ausgangskegelschnitte zwei Darstellungen, je nach dem, auf welchen Brennpunkt wir uns stützen. Vergleichen wir diese Darstellungen, können die sechs Teilausdrücke auf drei reduziert werden, weil etwa

$$k_1 = k_B[F_2] + k_D[d_{12}] = k_B[F_3] + k_D[d_{13}]$$

ist. Nun erscheinen die drei Sehnenpaare in der Form

$$k_1^* = k_D[d_{23}] + k_B[F_3] - k_B[F_1] - k_D[d_{31}],$$

$$k_2^* = k_D[d_{31}] + k_B[F_1] - k_B[F_2] - k_D[d_{12}],$$

$$k_3^* = k_D[d_{12}] + k_B[F_2] - k_B[F_3] - k_D[d_{23}].$$

Die symbolische Summe der drei Ausdrücke verschwindet, die Schnittpunkte von k_1^* mit k_2^* sind auch Schnittpunkte mit k_3^* . Die drei Sehnenpaare haben nur vier Schnittpunkte und nicht zwölf. Die Sehnen sind die Seiten eines vollständigen Vierecks (Abb. 9: Der absolute Kegelschnitt ist wie immer gestrichelt, die Brennpunkte liegen außerhalb ihrer Kegelschnitte, bis auf zwei sind alle Schnittpunkte reell.).

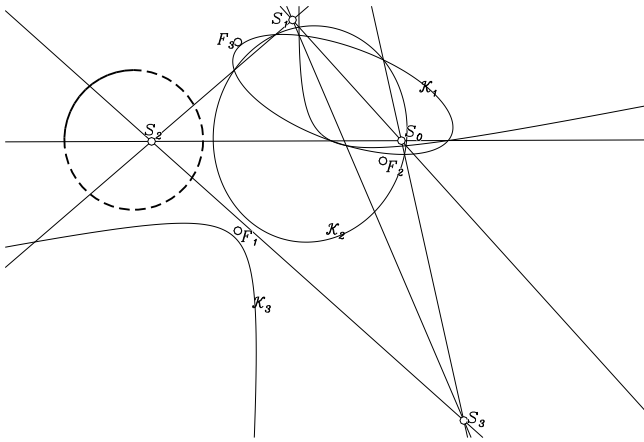


Abbildung 9: Drei brennpunktteilende Kegelschnitte in der nicht-euklidischen Ebene mit dem Viereck der Sehnenschnittpunkte

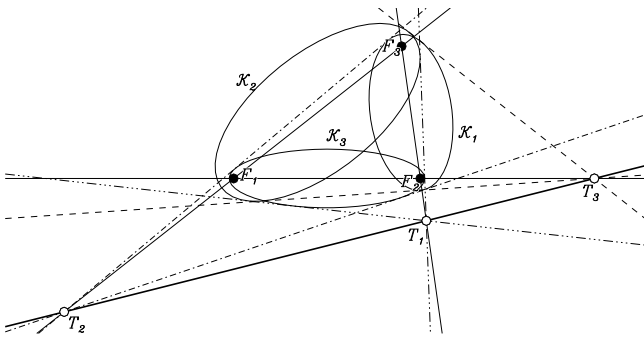


Abbildung 10: Das Vierseit der Tangentenschnittpunkte

7 Asymptoten

Formal werden Geraden und Punkte durch Koordinaten-tripel beschrieben, denen man nicht ohne weiteres ansieht, ob sie Geraden oder Punkte darstellen sollen. Darüberhinaus sind die Sätze über Punkte, Geraden und Kegelschnitte mit der dreidimensionalen Vektoralgebra bewiesen, der die geometrische Bedeutung der Koordinaten gleichgültig ist. Deshalb kann zu jedem Satz fragen, was geschieht, wenn die Rollen von Punkten und Geraden ganz oder teilweise vertauscht werden.

Statt nach den gemeinsamen Sehnen der drei Kegelschnitte zu fragen, kann man auch nach den gemeinsamen Tangenten forschen. Zu jedem Ellipsenpaar unseres Dreiecks gehören dann zwei reelle gemeinsame Tangenten, und diese müssen sich auf der dem Brennpunkt gegenüberliegenden Seite des Dreiecks treffen (Abb. 2: Der Schnittpunkt T_1 der gemeinsamen Tangenten liegt auf der Verbindungsgeraden der anderen beiden Brennpunkte F_2 und F_3 . Seine beiden Polaren $p_1[T_1]$ und $p_2[T_1]$ schneiden sich auch im Schnittpunkt Q_1 der Direktrizen zum gemeinsamen Brennpunkt F_1 .) Entsprechend findet man die anderen beiden Punkte T_2 und T_3 und ihre Kollinearität.

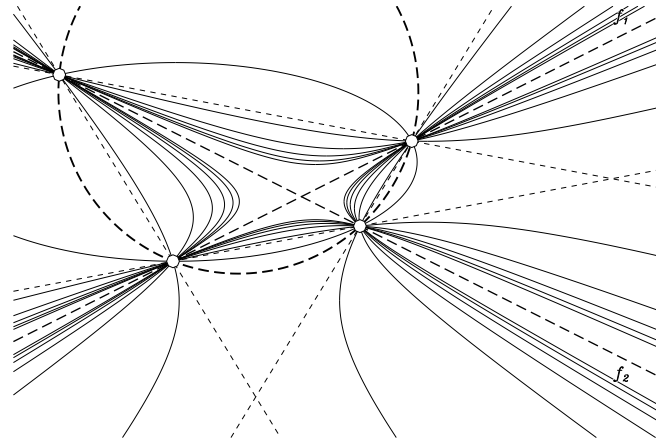


Abbildung 11: Kegelschnittschar zu zwei gegebenen Asymptoten, die beide den absoluten Kegelschnitt schneiden. Aus den zwei Asymptoten werden über die vier Schnittpunkte mit dem absoluten Kegelschnitt sechs. Die Asymptoten sind die sechs gemeinsamen Sehnen der Schar.

Die zu den drei Ellipsenpaaren gehörenden Schnittpunkte liegen auf einer Geraden. Wieder gibt es zu jedem der Ellipsenpaare noch zwei weitere gemeinsame Tangenten, beide konjugiert komplex mit einem reellen Schnittpunkt: Es ist der gemeinsame Brennpunkt. Wir finden ein Vierseit (Abb. 10).

Zwei Kegelschnitte bestimmen 4 gemeinsame Tangenten. Haben sie einen gemeinsamen Brennpunkt, so liegen von den 6 Schnittpunkten liegen zwei auf den Seiten des Brennpunktdreiecks (einer davon ist der gemeinsame Brennpunkt selbst). Drei brennpunktteilende Kegelschnitte bestimmen drei solcher Schnittpunktpaare. Diese Punkte sind die sechs Ecken eines Vierseits.

Konstruiert man den Kegelschnitt analog (4) mit zwei Geraden, also

$$k = c - \mu \frac{f_1 \circ f_2 + f_2 \circ f_1}{\sqrt{(f_1 C f_1)(f_2 C f_2)}}, \quad (6)$$

welche Bedeutung haben dann die beiden Geraden? Es sind Asymptoten des Kegelschnitts. Die Punkte, in denen der Kegelschnitt \mathcal{K} den absoluten Kegelschnitt schneidet, sind auch Punkte einer der beiden Asymptoten $((Q, kQ) = (Q, cQ) = 0 \rightarrow (Q, f_1)(Q, f_2) = 0)$. Dual zu (3) schneiden sich die Polaren $p_k[Q]$ und $p_c[Q]$ eines Punktes Q einer Asymptoten f wieder auf der Asymptoten. Eine Kegelschnittschar zu zwei gegebenen Asymptoten zeigt Abbildung 11. Bedeutung haben die Schnittpunkte der Asymptoten mit dem absoluten Kegelschnitt. Alle Kegelschnitte der Schar passieren diese Schnittpunkte (natürlich auch, wenn diese nicht reell sind). Hat das Asymptotenpaar vier reelle Schnittpunkte mit dem absoluten Kegelschnitt, so hat das vollständige Viereck dieser Schnittpunkte sechs

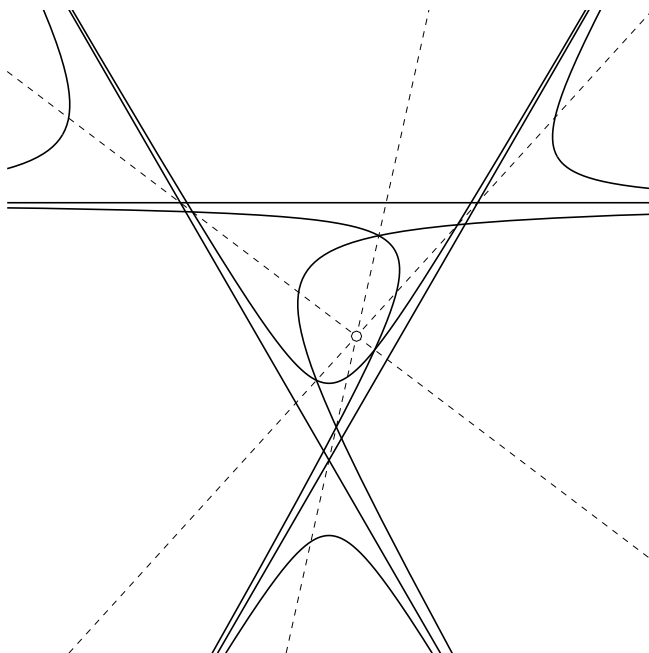


Abbildung 12: Drei asymptotenteilende Hyperbeln mit dem Viereck der Sehenschnittpunkte

Seiten. Jedes Seitenpaar, das nicht durch einen gemeinsamen Punkt des Vierecks geht, ist gleichermaßen zur Konstruktion der Kegelschnittschar geeignet. Die Asymptoteneigenschaft ist dual zur Eigenschaft der Brennpunkte (6): Liegt ein Punkt Q auf der Asymptoten a , dann schneiden sich die Polaren $p_k[Q]$ des Punktes bezüglich der Kegelschnitte \mathcal{K} der Schar und seine Polare $p_c[Q]$ bezüglich des absoluten Kegelschnitts \mathcal{C} auf der Asymptoten: $[a, p_k[Q], p_c[Q]] = 0$.

Haben zwei Kegelschnitte eine gemeinsame Asymptote, so liegen von den 6 Schnittpunkten der vier gemeinsamen Tangenten zwei auf der Verbindung der beiden Pole der gemeinsamen Asymptote und teilen diese harmonisch. Drei asymptotenteilende Kegelschnitte bestimmen drei solcher Schnittpunktpaare. Diese Punkte sind die sechs Ecken eines Vierecks.

Wir zeichnen nun drei Hyperbeln, die sich in drei Asymptoten teilen. Wir wählen sie hier so, dass ihre Schnittpunkte reell sind. Die gemeinsamen Sehnen gehen durch einen Punkt. Sie entstehen mit den drei Asymptoten als Seiten eines vollständigen Vierecks (Abb. 12).

Haben zwei Kegelschnitte eine gemeinsame Asymptote, so ist diese auch eine gemeinsame Sehne. Eine weitere gemeinsame Sehne passiert den Schnittpunkt der beiden anderen Asymptoten. Drei asymptotenteilende Kegelschnitte bestimmen drei solche Sehnen. Zusammen mit den Asymptoten bilden sie die sechs Seiten eines Vierecks

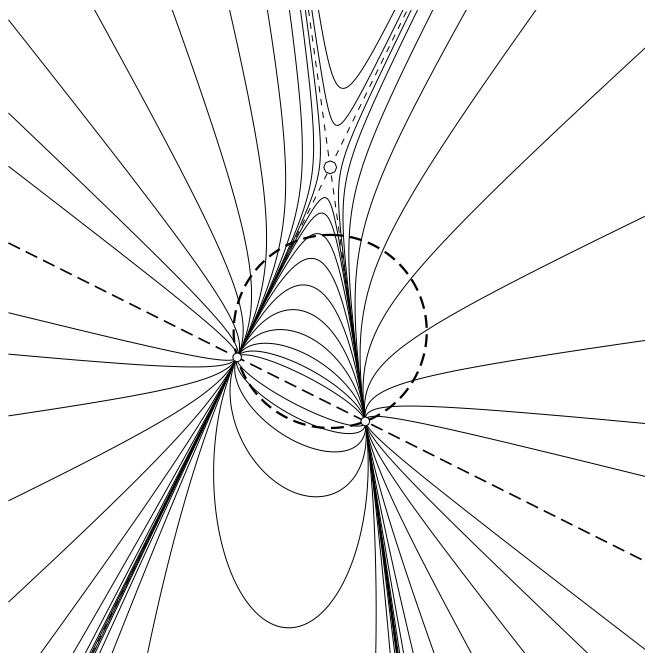


Abbildung 13: Kegelschnittschar mit gegebener Asymptote f und deren Pol D , dem gemeinsamen Tangentschnittpunkt

Schließlich fragen wir uns nach der Bedeutung der Konstruktionselemente, wenn die Tangentenschar \mathcal{K} analog (5) konstruiert wird:

$$\mathcal{K} = \mathcal{C} - \frac{\mathcal{C}f \circ \mathcal{C}f}{(f\mathcal{C}f)} + \frac{1}{\mu} \frac{D \circ D}{DcD} \tag{7}$$

Wir sehen uns diese Kegelschnittschar in Abbildung 13 an. Bedeutung haben die Schnittpunkte der Asymptote mit dem absoluten Kegelschnitt: Alle Kegelschnitte der Schar passieren diese Schnittpunkte, und zwar unabhängig von der Lage des Pols, der der Schnittpunkt der gemeinsamen Tangenten der Schar ist. Alles ist dual zum Kegelschnitt aus Brennpunkt und Directrix: Einmal sind f und D polar zueinander: $\mathcal{K}f \propto D$. Andererseits gilt: Geht eine Gerade g durch D , dann sind $\mathcal{C}g$, $\mathcal{K}g$ und $\mathcal{C}f$ kollinear.

8 Warum sieht man nichts davon in der gewohnten Geometrie?

In der gewohnten Geometrie ist das Unendliche kein ordentlicher Kegelschnitt, sondern eine Gerade, der Horizont, also ein entarteter Kegelschnitt. Stellen wir uns in den Abbildungen 7 und 14 vor, der Kreis, der das Unendliche darstellt, werde zusammengedrückt. Solange er noch ein Inneres hat, bleiben alle Konstruktionsstrategien unverändert. Der Grenzfall ist aber eine einfache Strecke, die kein Inneres mehr hat. Geraden, die vorher das Unendliche berührt haben, passieren jetzt einen der beiden Endpunkte dieser Strecke. Diese Endpunkte sind

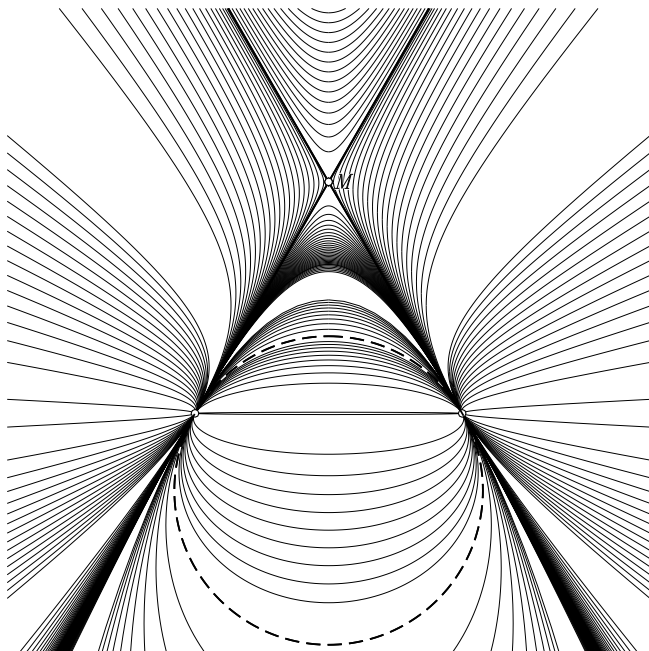


Abbildung 14: Konzentrische Kreise der deSitter-Ebene

noch reell und stellen zwei Fernpunkte auf einem Horizont dar.

Was wir jetzt vor uns haben, ist eine Projektion der Orts-Zeit-Ebene der speziellen Relativitätstheorie. Die beiden Endpunkte markieren die Richtung der Spuren auf der Orts-Zeit-Ebene, die von den Lichtsignalen gezogen werden. Bei Spiegelungen gehen sie immer ineinander, nie in andere Richtungen über.⁹ Die Kegelschnittschar mit zwei gegebenen Brennpunkten hat immer noch das in Abbildung 7 gezeichnete Aussehen, nur ist der das Unendliche darstellende Kegelschnitt auf die bewusste Strecke geschrumpft. Zwei der zusätzlichen vier Brennpunkte liegen nun immer auf deren Endpunkten, im Endlichen gibt es nur noch 4 Brennpunkte.

Rücken die beiden Ausgangsbrennpunkte auf einen Punkt M zusammen, bildet sich die Kreisschar um M . Es zeigt sich nun, dass alle Kreise durch die Endpunkte der absoluten Strecke gehen. Deshalb kann man diese beiden Punkte auch als absolute Kreispunkte bezeichnen. Während ein Kegelschnitt durch fünf Punkte bestimmt ist, reichen für den Kreis drei: Er ist dann als Kegelschnitt bestimmt, weil die fehlenden zwei Punkte durch diese absoluten Kreispunkte gegeben werden. Alle Kreise schneiden sich in diesen beiden Punkten (Abb. 14).

Der Pol $P_c[g]$ einer Geraden g , der am absoluten Kegelschnitt bestimmt werden muss, liegt nun immer auf dem Horizont c und teilt mit dem Fernpunkt $c \times g$ der Geraden die Endpunkte der absoluten Strecke harmonisch. Die Zuordnung von $P_c[g]$ zu $c \times g$ ist eine Inversion, de-

ren Fixpunkte die beiden absoluten Kreispunkte sind. Die Polare eines Punktes ist dagegen immer der gleiche Horizont, alle Punkte haben die gleiche Polare.

Nun ist es aber gerade diese Zuordnung von Geraden zu den Trägerpunkten ihrer Lote, die als Grundlage der Konstruktionen ausreicht. Deshalb müssen diese Inversionen auf dem Horizont c nicht unbedingt reelle Fixpunkte haben. Auch wenn E und F konjugiert komplex sind, ist ihre Verbindung, der Horizont, immer noch reell. Damit entsteht die gewohnte euklidische Geometrie. Die Tangenten aus den Brennpunkten an das Unendliche (und damit an den Kegelschnitt selbst) sind nicht mehr reell, die Brennpunkte müssen nun innerhalb der Kegelschnitte liegen. Nur noch zwei der sechs Brennpunkte sind reell und liegen im Endlichen, die anderen beiden Paare haben zwar noch reelle Verbindungen (die kleine Achse und den Horizont), sind aber selbst nicht mehr reell, d.h. unsichtbar auf der Zeichnung. Dennoch sind sie arithmetisch behandelbar, wenn man komplexe Zahlen zulässt. Auch in der euklidischen Geometrie schneiden sich also alle Kreise in zwei gemeinsamen Punkten, den absoluten Kreispunkten, nur liegen diese auf der Ferngeraden und sind nicht mehr reell.

Literatur

- [1] E.H.Neville: A focus-sharing set of three conics, *Math.Gazette* **20/239** (1936), 182-183.
- [2] E.H.Neville: The focus-sharing conics again, *Math.Gazette* **21/242** (1937), 56, Note 1226.
- [3] D.-E.Liebscher: Jenseits des Unendlichen, *Der mathematisch-naturwissenschaftliche Unterricht* **63/6** (2010), 336-339.
- [4] D.-E.Liebscher: *Einstein's Relativitätstheorie und die Geometrien der Ebene: Illustrationen zum Wechselspiel von Geometrie und Physik*, B.G.Teubner, Stuttgart und Leipzig 1999, ISBN 3-519-00278-7.
- [5] L.Crawford: Determination of the foci, directrices, axes and eccentricities of a conic whose equation is given with numerical coefficients, *Math.Gazette* **18/227** (1934), 43-46.
- [6] D.-E.Liebscher: Ausführlichere Rechnungen zum Artikel, <http://www.aip.de/People/deliebscher/Publikationen/DreiEllipsen-Ergaenzungen.pdf>

Verfasser: Prof.Dr. DIERCK-E.LIEBSCHER,
 deliebscher at aip.de,
 Rosa-Luxemburg-Str. 17 C, 14482 Potsdam

⁹Beschreiben wir die Ebene in den gewohnten Cartesischen Koordinaten Ort und Zeit, zeigt es sich, dass die Geraden Spuren einer geradlinig gleichförmigen Bewegung sind. Ihre Neigung gegen die Vertikale zeigt die Geschwindigkeit.

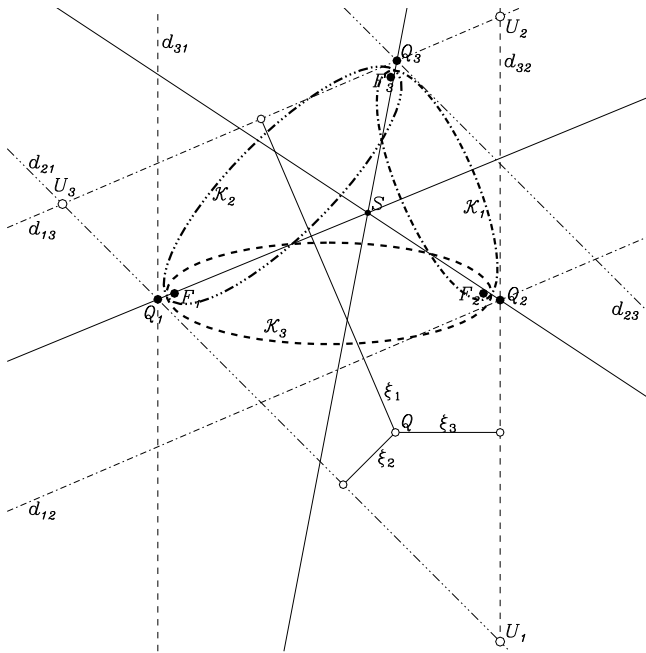


Abbildung 15: Drei Ellipsen auf der euklidischen Ebene

Die Lösung dieses Gleichungssystems ist

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \kappa_1 + \varepsilon_1^{-1}(\kappa_2\varepsilon_2 - \kappa_3\varepsilon_3), \\ \xi_2 &= \kappa_2 + \varepsilon_2^{-1}(\kappa_3\varepsilon_3 - \kappa_1\varepsilon_1), \\ \xi_3 &= \kappa_3 + \varepsilon_3^{-1}(\kappa_1\varepsilon_1 - \kappa_2\varepsilon_2). \end{aligned}$$

Das sind zulässige Koordinaten, weil sie die Bedingung $\sum_k g_k(\xi_k - \kappa_k) = 0$ erfüllen. Das tun sie, weil die Seiten g_i proportional $f_i = \kappa_i\varepsilon_i^2$ sind. Damit ist der Schnittpunktsatz in der euklidischen Geometrie bewiesen und der Schnittpunkt berechnet.

9 Die Liebe zu den drei Ellipsen: Beweis des Schnittpunktsatzes

Die Punkte der Ellipse können durch ihren Abstand von einem Brennpunkt (F_1 in Abb. 2) und der zugehörigen Directrix (dort d_{21} und d_{31}) bestimmt werden. Das Verhältnis beider Abstände ist die Exzentrizität ε . So gilt für den Schnittpunkt S als Punkt von \mathcal{K}_2 die Gleichung $\varrho[SF_1] = \varepsilon_2 \varrho[SL_{21}]$ und als Punkt von \mathcal{K}_3 die Gleichung $\varrho[SF_1] = \varepsilon_3 \varrho[SL_{31}]$, also $\varepsilon_2 \varrho[SL_{21}] = \varepsilon_3 \varrho[SL_{31}]$. Dies bestimmt als Gleichung für die beiden Schnittpunkte eine Gerade, die gemeinsame Sehne.

Wir wählen ein Dreieck $F_1F_2F_3$, wo jedes Punktepaar Brennpunktepaar einer Ellipse ist, F_1F_2 für \mathcal{K}_3 , F_2F_3 für \mathcal{K}_1 , F_3F_1 für \mathcal{K}_2 . Die Brennpunktdistanzen (Seitenlängen) seien $2f_1 = \varrho[F_2F_3]$, und so weiter. Jede Ellipse hat ein Directrixenpaar, \mathcal{K}_1 hat d_{12} und d_{13} und so weiter, mit entsprechenden Abständen $\kappa_1 = f_1\varepsilon_1^{-2}$.

Die Directrices d_{32} , d_{13} und d_{21} bilden das Dreieck $U_1U_2U_3$ (mit den Seiten $g_1 : g_2 : g_3 = f_1 : f_2 : f_3$), an dem wir die Distanzen ξ_3 , ξ_1 und ξ_2 ablesen, die auf die Fläche normiert sind ($\sum_i g_i\xi_i = \sum_i g_i\kappa_i$). Wir nennen sie trilineare Koordinaten.

Die Ellipsen sind definiert als geometrischer Ort der Punkte; deren Abstand von einem der Brennpunkte ein fester Teil (ε) des Abstandes von der entsprechenden Directrix ist. Das heißt für die gemeinsamen Sekanten

$$\begin{aligned} (2\kappa_1 - \xi_1)\varepsilon_1 - \xi_3\varepsilon_3 &= 0 && \text{bei } F_2, \\ (2\kappa_2 - \xi_2)\varepsilon_2 - \xi_1\varepsilon_1 &= 0 && \text{bei } F_3, \\ (2\kappa_3 - \xi_3)\varepsilon_3 - \xi_2\varepsilon_2 &= 0 && \text{bei } F_1. \end{aligned}$$