Die Liebe zu den drei Ellipsen

Dierck-E.Liebscher, Potsdam

Dieser Beitrag soll auf projektive und nichteuklidische Geometrie neugierig machen. Wer weiß schon, dass alle Kreise der euklidischen Ebene eine gemeinsame Sehne haben oder dass eine Ellipse sechs Brennpunkte hat?

1 Drei Ellipsen um drei Brennpunkte

1987 brachte mein Sohn von der Vorbereitung für die Mathematikolympiade eine Aufgabe mit, deren Einfachheit und Schönheit mich immer wieder verblüfft und anzieht. Diese Aufgabe ist schon des öfteren behandelt worden, meiner Kenntnis nach immer im Rahmen der euklidischen Geometrie. Sie ist aber auch in der nicht-euklidischen Geometrie lösbar. E.H.Neville, der die Aufgabe 1936 vorgestellt hat [1], zeigt den euklidischen Beweis, seine Bemerkung über den nichteuklidischen Fall ist aber nicht ausgeführt [2]. Der Weg zu diesem Beweis lüftet den Schleier, der die nichteuklidische Geometrie verhüllt, führt vor Augen, was in der euklidischen Geometrie verborgen bleibt, weil es sich dort im unendlich Fernen oder im Imaginären abspielt, zeigt etwas von den Techniken der projektiven Geometrie und gibt vielen verblüffenden Groschen die Möglichkeit zu fallen. Deshalb wird er hier vorgestellt. Ausführliche Rechnungen finden sich im Netz [6].

Es geht zunächst um drei Ellipsen, die sich in drei Brennpunkte teilen. Zwei Ellipsen haben dann maximal zwei reelle Schnittpunkte miteinander und bestimmen eine gemeinsame Sehne. Was so verblüffend ist: Die drei Sehnen sind konkurrent, sie gehen durch einen gemeinsamen Punkt (Abb. 1). Der Beweis, den ich erst nach vier Stunden im Liegestuhl gefunden hatte, findet sich ähnlich bei Neville [1]: Man erinnert sich zuerst an die Eigenschaft der Ellipsenpunkte, ein festes Abstandsverhältnis zu einem Brennpunkt und seiner zugeordneten Leitgeraden (Directrix) zu halten (Abb. 2). Wir erhalten eine einfache Gleichung für die gemeinsame Sehne zweier Ellipsen, die den Brennpunkt gemeinsam, aber jeder seine eigene Leitlinie haben. Die drei Paarungen führen auf drei Sehnen, die alle durch eine solche Gleichung beschrieben werden. Man muss nur zeigen, dass die drei Geraden durch einen Punkt gehen. Weil vielleicht ein Leser die Lösung selbst suchen möchte, findet man sie gesondert auf Seite 9 [redacted].

2 Die projektive Sicht

Schnittpunktsätze für gerade Linien stehen immer im Verdacht, von den metrischen Voraussetzungen der euklidischen Geometrie unabhängig zu sein und einen Hinter-

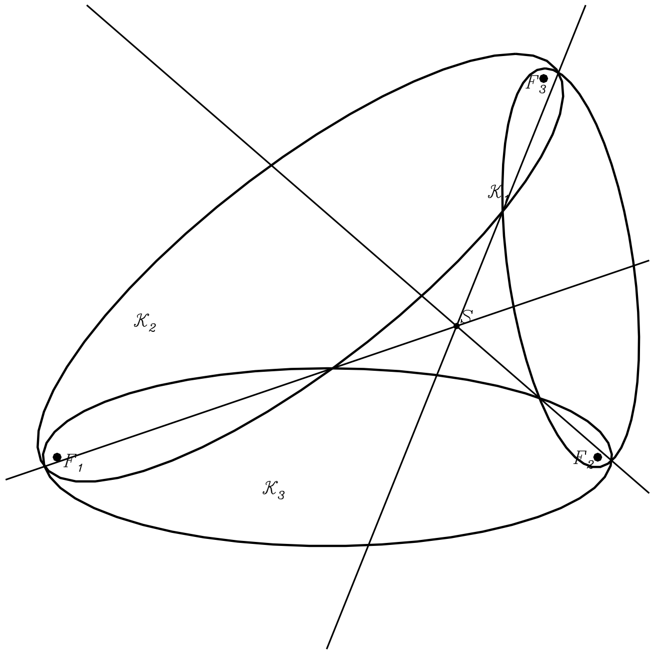

Abbildung 1: Der Ausgangspunkt

grund zu haben, der nur projektive Eigenschaften voraussetzt. Und wenn Längen und Winkel eine Rolle spielen, dann müssen sie nicht unbedingt die euklidischen Eigenschaften haben, die beispielgebend vom Satz des Pythagoras dargestellt werden. Das heißt aber, die Schnittpunktsätze sollten dann auch in der nichteuklidischen Geometrie gelten, wie sie von Lobachevski, Gauß und Bolyai konstruiert worden ist.[1]

Aus projektiver Sicht sind Parabeln und Hyperbeln genau so gut wie Ellipsen. Sie unterscheiden sich nur durch ihre Beziehung zum unendlich Fernen. Sieht man sich nun drei Hyperbeln an, die sich in drei Brennpunkte teilen, erkennt man als erstes, dass jeweils zwei dieser Hyperbeln bereits vier reelle Schnittpunkte und sechs reelle gemeinsame Sehnen haben können. Zwei dieser Sehnen schneiden sich im Schnittpunkt der zum gemeinsamen Brennpunkt gehörenden Leitlinien. Dieses Sehnenpaar interessiert uns hier. Die drei Hyperbelpaarungen erzeugen so drei solcher Sehnenpaare. Zwölf Schnittpunkte kann es bei drei Geradenpaaren geben. Es sind hier aber nur vier (Abb. 3). Die drei Sehnenpaare sind die Seiten des vollständigen Vierecks $[S_0, S_1, S_2, S_3]$.

Zwei Kegelschnitte bestimmen 4 Schnittpunkte. Haben sie einen gemeinsamen Brennpunkt, passieren von den 6 gemeinsamen Sehnen zwei den Schnittpunkt der entsprechenden Leitlinien. Drei brennpunktteilende Kegelschnitte bestimmen drei solche Sehnenpaare. Diese Sehnen sind die sechs Seiten eines Vierecks.

[1] Der Satz, dass sich die drei Höhen eines Dreiecks in einem Punkt schneiden, kann unmittelbar als Axiom für die Erweiterungen der euklidischen Geometrie gelten, die hier angesprochen werden.