Mit dem Kompaßwagen über den Globus

Prof.Dr.Dierck-E.Liebscher,
http://kosmos.aip.de/~lie, Astrophysikalisches Institut Potsdam, 14482 Potsdam

Ein einfach nachzubauendes Getriebe mit historischem Hintergrund verwirklicht die Führung auf geodätischen Linien und den geodätischen Paralleltransport auf gekrümmten Flächen.

1. Die Aufgabe

Stellen wir uns vor, wir befinden uns auf einer Ebene und sehen in der Ferne unser Ziel. Nichts hindert uns daran, es auf kürzestem Wege anzusteuern. Wir bewegen uns einfach in der Richtung, in der es zu sehen ist. Der *Lichtstrahl* ist die beste Näherung einer idealen kürzesten Linie, die wir uns vorstellen können.

Nun entwickelt sich aber Nebel, das Ziel verschwindet vor unseren Augen. Was ist zu tun? Wir halten an und merken uns die Richtung, in die wir eben noch gegangen sind. Wie weiter? Ohne Hilfsmittel werden wir im Kreise gehen, weil unsere Schrittlängen rechts und links verschieden sind. Je symmetrischer wir gehen, desto größer wird der Kreis sein, aber nobody is perfect. Der Kompaß kann helfen: Er zeigt uns im Idealfall die Richtung zu einem weit entfernten Magnetpol. Wir stellen den Winkel der eben noch benutzten Richtung zur Nadel fest und gehen nun weiter, immer darauf achtend, daß diese Abweichung sich nicht verändert, und finden unser Ziel.

Was aber, wenn die Entfernung zum Magnetpol nicht so sehr groß ist? Es könnte ja sein, daß auf Grund einer magnetischen Anomalie der Punkt, zu dem die Magnetnadel zeigt, ganz in der Nähe ist, oder daß das Ziel auf der anderen Seite der Erdkugel liegt. Dann erreichen wir unser Ziel nicht. Die Kurve fester Abweichung von der Richtung zu einem Pol ist keine Gerade und keine kürzeste Linie. Auf der Ebene ist sie eine logarithmische Spirale — im Ausnahmefall ein Kreis um den Pol oder eine Gerade durch den Pol — und auf der Kugel eine Loxodrome (Abb. 1) — im Ausnahmefall ein Breitenkreis oder ein Meridian.

Wie finden wir die kürzeste Linie, wenn die Magnetnadel versagt und das Ziel nicht sichtbar ist? Wir können versuchen, eine symmetrische Schrittlänge technisch zu erreichen. Denken wir daran, daß man zwei Räder gleichen Umfangs nicht starr auf eine Achse montieren darf, wenn man ohne Rutschen eine Kurve fahren will. Solche Räder verwirklichen gerade gleiche Schrittlänge rechts und links, die wir ohne Hilsmittel oder Steuerung durch die Sichtlinie sonst nicht einhalten können. Zwei Räder gleichen Umfangs, die fest auf eine Achse montiert sind, rollen immer geradeaus (Abb. 2). Wenn man mit einem Wagen Kurven fahren muß, ist das sogar hinderlich. Im Kraftfahrzeug muß deshalb der Antrieb über ein *Differentialgetriebe* verteilt werden. Im klassischen Eisenbahnwaggon werden die Laufflächen konisch gearbeitet: Bei Kurvenfahrt verschiebt dann die Zentrifugalkraft den Wagen so, daß das Außenrad über einen größeren und das Innenrad über einen kleineren Umfang abrollt. Hier sind wir aber gerade froh über die sonst hinderliche Starre fest montierter Räder. In unserem Falle liefern sie die gesuchte Lösung des Problems der beständigen Geradeausfahrt.

Taucht ein Hindernis auf, müssen wir ausweichen. Das kann eine Achse mit fest montierten Rädern nicht, ohne die eingeschlagene Richtung zu verlieren. Also lassen wir die Räder doch beweglich, messen aber ihre Wege und rechnen die Differenz auf die Drehung der Achse um, damit diese später wieder richtig zurückgestellt werden kann. Wir lösen diese Aufgabe mit einem Differentialgetriebe. Ein solches Differentialgetriebe arbeitet als mechanischer Analogrechner für unsere Aufgabe. Zunächst aber wollen wir die Legende zu Wort kommen lassen.

In mythischen Zeiten, vor mehr als 5000 Jahren, hatte der erste chinesische Kaiser Huang-Di [4] einen Kampf mit dem Halbgott Chi-You zu bestehen, der die Armee des Kaisers mit Nebel einhüllte und ihr so jede Sicht nahm. Zu dieser Zeit gab es noch keine Magnetnadel, aber der Kaiser erfand einen Kompaßwagen, der die Figur eines Heiligen trug, der dank einer sinnreichen Mechanik immer in eine feste Richtung wies, an der sich der Kaiser orientieren und die Armee durch den Nebel und zum Sieg führen konnte. Soweit die Legende. Vor inzwischen mehr als 1000 Jahren versuchte nun ein chinesischer Ingenieur, die mögliche Existenz einer solchen Konstruktion zu zeigen, indem er selbst eine entwarf, etwa wie Thor Heyerdahl die Möglichkeit von kulturellen Verbindungen über die Ozeane gezeigt hat, indem er die vermuteten Wege selbst bewältigte. Auch von dieser Konstruktion ist nichts geblieben außer dem Namen (Zhi nan che, nach Süden weisender Wagen), einer Beschreibung und der Abbildung einer Jadefigur ihres Zeigers

Abbildung 1: Eine Loxodrome

Die Loxodromen sind Kurven fester Neigung gegen eine vorgegebene Linienkongruenz, in unserer Abbildung gegen die Meridiane einer Kugel. Sie kann durch die Magnetnadel gesteuert werden. In unserer Abbildung hat die Loxodrome eine feste Abweichung vom Meridian von ungefähr $\delta = 0.35\pi$ und nähert sich dem Pol wie eine logarithmische Spirale, ohne ihn je zu erreichen (die logarithmischen Spiralen sind die Loxodromen der Ebene). In Kugelkoordinaten (geographische Länge λ, geographische Breite ϕ) ist die Gleichung der Loxodromen $\cos\phi \; \mathrm{d}\lambda = \tan\delta \; \mathrm{d}\phi$. Für $\delta = \pi/2$ ergeben sich die Breitenkreise.

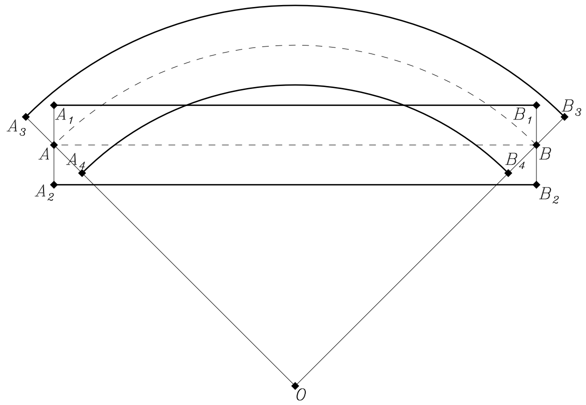

Abbildung 2: Kurvenfahrt einer Achse.

Ziehen wir eine Achse von A nach B auf einer Geraden, sind die beiden Wege A_1B_1 und A_2B_2 gleich lang. Auf einer gekrümmten Kurve (hier einem Kreisbogen) ist der Weg des äußeren Rades länger als der des Innenrades, $A_3B_3 = \frac{\pi}{2}OA_3 > \frac{\pi}{2}OA_4 = A_4B_4$.

(Abb. 3, [1]). Inzwischen gibt es neue und verbesserte Modelle. Eins davon steht vor dem Museum für Wissenschaft und Technik in Taipeh (Abb. 4). Dieses Modell wollen wir genauer studieren (Abb. 5).

Die beiden Laufräder A sind beweglich auf einer Achse montiert (die nicht gezeichnet ist) und treiben über die mit ihnen fest verbundenen Räder B die horizontalen Räder C, die ihrerseits die beiden wieder beweglich auf der vertikalen Achse montierten Scheiben D treiben. Drehen sich die Räder A gleich schnell und in gleichem Sinne, drehen sich die Scheiben D gerade entgegengesetzt gleich schnell. Die Räder E auf der Läuferachse drehen sich dann an ihrem Platz, d.h. ihre momentane Drehachse fällt immer mit der Läuferachse zusammen, die Läuferachse bewegt sich (relativ zum Gestell) nicht, die von ihr geführte vertikale Achse mit der Fahne steht. Drehen sich die Laufräder A verschieden schnell, überträgt sich dieser Unterschied auch auf die Scheiben D. Nun kann die Läuferachse nicht mehr fest im Gestell bleiben, sie dreht sich mit der halben Summe der Drehgeschwindigkeiten der beiden Scheiben, d.h. mit der halben *Differenz* der Drehgeschwindigkeiten der beiden Laufräder A. Es ist eine Frage der Übersetzung, ob die Drehung der Fahne zum Gestell die Drehung des Gestells auf der Ebene kompensiert. Ist der Radius der Laufräder gleich ihrem Abstand und sind die Räder des Getriebes alle gleich groß (die Größe der Räder E auf der Läuferachse ist unerheblich), ist die Kompensation perfekt. Die Drehung der Fahne zum Wagen zeigt die Differenz der Wege der beiden Laufräder A an. Diese Differenz wiederum bedeutet eine Drehung des Wagens in entgegengesetzter Richtung. Ziehen wir den Wagen in der Ebene auf einem beliebigen Weg, bleibt die Richtung der Fahne zur Ebene fest (Abb. 6).

2. Flächen mit Krümmung und Torsion

Das Erstaunliche ist, der Kompaßwagen tut sei-

Abbildung 3: Die Beschreibung des Kompaßwagens

In dieser historischen Beschreibung des Modells wird ein Planetengetriebe vorgeschlagen, das aber wesentlich ungenauer als ein Differentialgetriebe arbeitet. Das hier gezeigte Blatt wird u.a. in J.Needham [1] reproduziert.

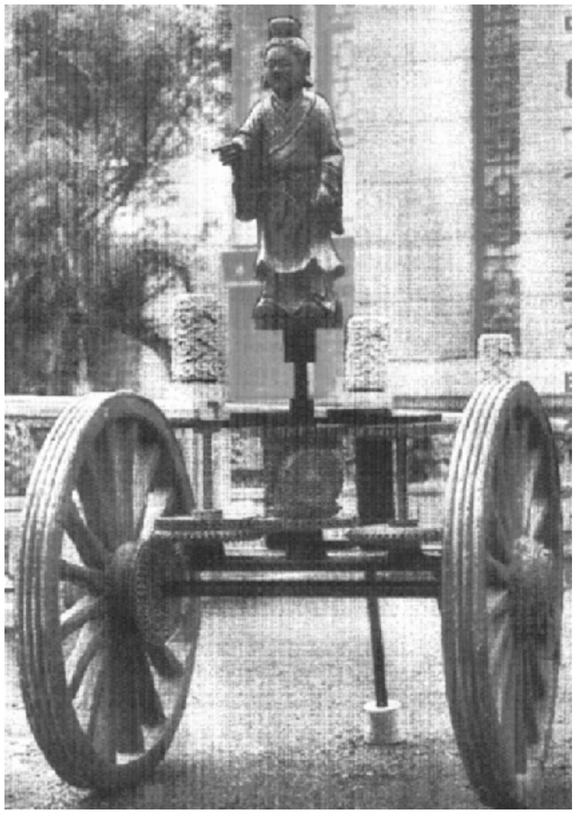

Abbildung 4: Ein Modell des Kompaßwagens.

Dieses Modell eines Kompaßwagens steht vor dem Nationalmuseum in Taipeh. Yinan Chin [3] hat mir dieses Foto zukommen lassen.

nen Dienst auch auf jeder gekrümmten Fläche, wenn nur die Krümungsradien der Fläche groß genug gegen den Radabstand sind. Ziehen wir auf einer gekrümmten Fläche den Wagen immer in Richtung der Fahne (die wir am Anfang wählen können), bewegen wir uns auf einer Geodäten, d.h. auf einer kürzesten Linie. Wir wollen zunächst sehen, warum das so ist. Wenn wir zu einer Kurve zwei Nachbarlinien in festem Abstand ziehen, so wie es die Räder auf einer Achse tun, dann wird im allgemeinen die Linie auf der einen Seite kürzer, die auf der anderen länger sein als die Bezugskurve (Abb. 2). Die Unterschiede werden um so größer sein, je weiter der Radstand ist. Wir können dann den Wagen auf die kürzere Nachbarlinie lenken. Der Lenkweg muß zwar addiert werden, ist aber bei genügend engem Radstand immer zu klein, um den Effekt etwa zu kompensieren. Die Bezugslinie ist in diesem Falle keine Geodäte. Unser Beispiel sei ein Breitenkreis auf einer Kugel. Ist der Breitenkreis nicht der Äquator, dann sind benachbarte Breitenkreise länger oder kürzer, je nachdem ob sie äquator- oder polseitig liegen und die Differenz ist proportional zum Abstand. Der Breitenkreis ist also keine Geodäte. Zwei Orte gleicher geographischer Breite haben immer eine kürzere Verbnindung als den Breitenkreis selbst. Anders ist es nur beim Äquator (stellvertretend für jeden anderen Großkreis). Die Breitenkreise auf *beiden* Seiten des Äquators sind nun kürzer als der Äquator selbst, der Unterschied fällt aber deshalb *schneller* als der Abstand, und zwar mit dem Quadrat des Abstands. Die benachbarten Breitenkreise bieten folglich keine kürzere Alterna-

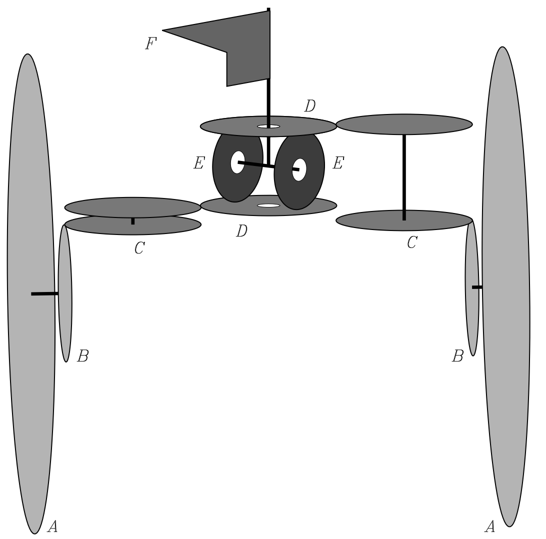

Abbildung 5: Subtraktionsgetriebe.

Gezeigt ist das Getriebe des Modells. Eine Drehung des Wagens bewirkt ungleiche Drehgeschwindigkeiten der beiden Räder A. Diese Drehgeschwindigkeiten werden auf die beiden um die senkrechte Achse frei beweglichen Hilfsräder D übertragen, die zusammen mit dem Läufer E das eigentliche Differential bilden. Auf einer gekrümmten Fläche hält die Fahne die Richtung bei jedem Schritt.

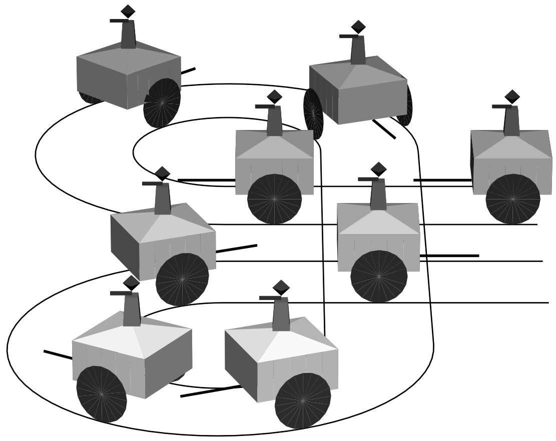

Abbildung 6: Die Bewegung des Kompaßwagens.

Ohne Rücksicht auf den Weg, entlang dessen der Wagen gezogen wird, hält das Getriebe innen die Richtung fest, in die die Figur außen zeigt.

tive, weil die Einsparung nun *keine* Kompensation für den — wie oben — zusätzlich benötigen Lenkweg bietet. Der Äquator ist eine Geodäte. Generell liegt zwischen zwei eng benachbarten Kurven festen Abstands und gleicher Länge ein Geodäte. Zwei fest montierte Räder gleicher Größe oder die Laufräder des durch die Fahne geführten Kompaßwagens fahren solche Kurven ab, führen also den Wagen auf einer Geodäten. Die Aufgabe, in gegebener Richtung auf einer gekrümmten Fläche die Geodäte zu finden, ohne etwa das Ziel zu kennen und durch einen gespannten Faden oder durch einen Lichtstrahl anpeilen zu können, wird durch den Kompaßwagen gelöst.

Wir formulieren dieses Ergebnis nun wieder als Aussage über das Festhalten der Richtung. Der Kompaßwagen transportiert die Fahne und ihre Richtung so, daß sie gerade auf einer Geodäten parallel bleibt. Hier ist ein *Halt!* geboten. Stellen wir uns vor, wir befinden uns auf einer Kugel im Raum und ziehen den Kompaßwagen über die Oberfläche. Nach dreidimensionaler Bewertung *kann* die Richtung der Fahne dann überhaupt nicht parallel bleiben. Wenn wir sagen, der Wagen transportiere die Richtung der Fahne parallel — ohne ihre Richtung auf der *Fläche* zu ändern, dann haben wir nichts weiter getan, als den Paralleltransport zu *definieren*. Es bleibt also zu untersuchen, wie man allgemein zu solch einer Definition kommt.

Verschieben wir eine Richtung, ohne diese zu ändern, nennen wir das Paralleltransport. Das ist leicht und wie selbstverständlich gesagt, aber wir haben schon gesehen, daß das Festhalten einer Richtung durchaus nicht eindeutig ist. Auf einer — im Raum eingebetteten — gekrümmten Fläche kann man einen Tangentialvektor verschieben, wie man will, im allgemeinen kann er — aus Sicht des dreidimensionalen Raumes — überhaupt nicht parallel bleiben. Folglich bleibt das, was wir auf einer gekrümmten Fläche parallel nennen wollen, einer besonderen Festlegung überlassen, an die wir zwar Wünsche formulieren können, die aber ansonsten frei konstruiert werden kann. So bleibt es uns überlassen zu sagen, daß zwei Tangentialvektoren parallel sein sollen, wenn sie die gleiche Abweichung von der Magnetnadel (der Richtung zu einem festen Punkt der Fläche haben) haben.

Eine solche Vorschrift ist vom Wege der Verschiebung unabhängig. Kehren wir nach einer Reise, auf der wir eine Richtung immer parallel verschoben haben, zum Ausgangspunkt zurück, fällt sie wieder mit der Ausgangsrichtung zusammen. Wir wissen bereits, daß diese Vorschrift einen großen Nachteil hat: Die Richtungen einer Geodäten wären dann an verschiedenen Punkten *nicht* zu sich selbst parallel. Wenn wir — nach dieser Vorschrift — den an einem bestimmten Punkt festgestellten Richtungsvektor einer Geodäten längs der Geodäten parallel verschieben, fällt er so gut wie nie mit dem momentanen Richtungsvektor der Geodäten zusammen. Diese Eigenschaft unserer Verschiebungsvorschrift heißt *Torsion.* Wir illustrieren sie an einem Dreieck in der gewöhnlichen Ebene (Abb. 7). Wir definieren einen Magnetpol P und nennen zwei Richtungen parallel genannt, wenn ihre Abweichung von der Magnetfeldrichtung gleich ist. Nun sind die Richtungen der Geodäte AB bei A und B nicht mehr parallel. Die parallelverschobene Richtung ist bei B durch einen strichpunktierten Pfeil gekennzeichnet. Nach einer Parallelverschiebung der Richtung bei A muß bei B um den Winkel $\omega_2 = \alpha_2 + \delta_2 + \alpha_1 + \delta_1 - \pi$ gedreht werden, um die Richtung der Verbindungslinie wieder zu treffen. Ähnliches gilt für die Richtung von BC, hier muß bei C um den Winkel $\omega_3 = \pi - \delta_2 - \delta_3$ gedreht werden. Schließlich finden wir bei A, daß die aus C verschobene Richtung von CA um $\omega_1 = \alpha_3 + \delta_3 - \pi - \delta_1$ gedreht werden muß. Die Addition der drei Winkel ergibt $\sum \omega_i = \sum \alpha_i - \pi$. — Wir haben weder die Existenz des Schnittpunktes P der Magnetfeldlinien noch die Eigenschaft der Seiten benutzt, Geraden in einer Ebene zu sein. Die Formel gilt also auch für beliebige Dreiecke und beliebige Flächen, solange nur die Verschiebung von einem Punkt zum anderen — wie im Falle der Magnetnadel — vom Wege nicht abhängt, wir also von einem *fernparallelen* Transport sprechen können.

Torsion tritt auf einer allgemeinen Fläche immer auf, wenn die Verschiebung fernparallel ist. Die Torsion ist ein Bestandteil der Geometrie, der *unabhängig* von den Maßverhältnissen auf der Fläche durch die Vorschrift der Parallelverschiebung definiert ist.

Wollen wir uns dagegen allein auf die Maßverhältnisse stützen, müssen wir einen anderen Weg einschlagen, auf dem wir uns ausschließlich an den Geodäten orientieren. Wir vereinbaren dann, daß Parallelverschiebung längs einer Geodäten die Abweichung von *deren* Richtung nicht verändert (Abb. 8). Insbesondere sind die Richtungsvektoren der Geodäten selbst zueinander längs der Geodäten

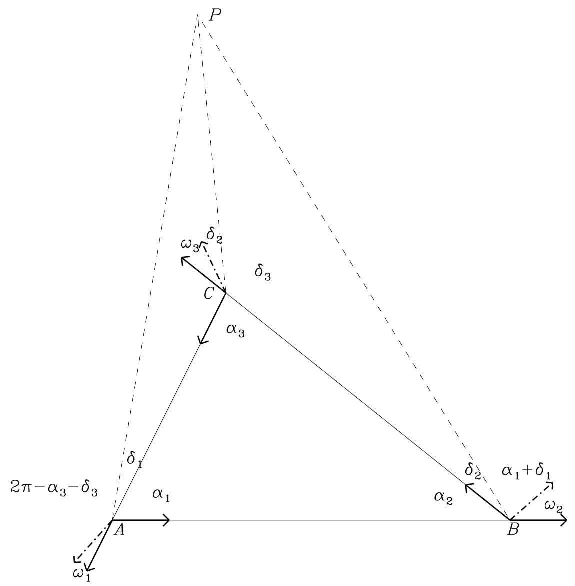

Abbildung 7: Die Torsion des Magnetnadeltransports.

Wir zeichen ein geodätisches Dreieck auf der Ebene und die Richtungen zum Magnetpol in den drei Ecken. Zwei Richtungen werden parallel genannt, wenn ihre Abweichung von der Magnetfeldrichtung gleich ist. So wird die Richtung der Verbindungslinie AB bei A, angedeutet durch den starken Pfeil in Richtung B, in die durch den strichpunktierten Pfeil bei B angedeutete Richtung verschoben.

parallel verschoben. Dies wird nun gerade von unserem Kompaßwagen verwirklicht. Fahren wir längs einer Geodäten, behält die Fahne ihre Stellung zum Wagen und damit auch ihre Richtung zur durchfahrenen Kurve bei. Wir nennen dann die Geodäte eine autoparallele Kurve und nennen den so definierten Transport den *geodätischen Paralleltransport.* Er ist allein durch die metrischen Eigenschaften der Fläche bestimmt und hat *keine* Torsion.

Bezahlt wird das mit einer Drehung aller Richtungen um einen gemeinsamen Winkel, wenn sie um eine geschlossene Kurve parallel transportiert und am Ausgangspunkt miteinander verglichen werden (Abb. 8). Diese Drehung ist — für genügend kleine umfahrene Flächen — der umfahrenen Fläche proportional. Der Faktor definiert die *Krümmung* der Fläche. Ziehen wir den Kompaßwagen um die gewählte Kurve, können wir an seinem Zeiger diese Gesamtdrehung ablesen. Ist die Kurve ein geodätisches

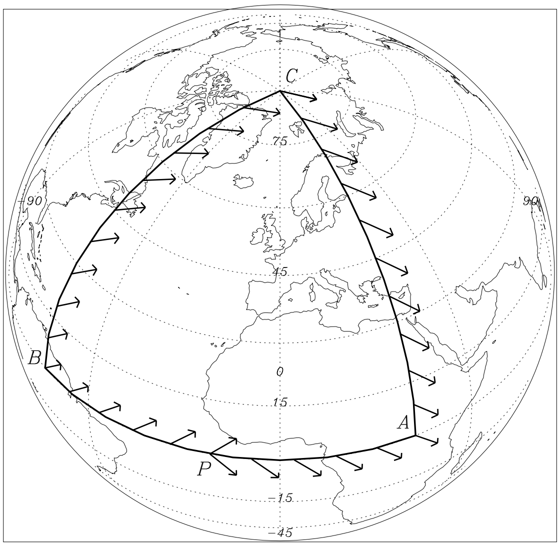

Abbildung 8: Dreieck auf der Kugel mit Exzeß und Rotation der Tangenten.

Am Punkt P wählen wir eine beliebige Richtung (hier nach SO). Längs der Geodäten bis Punkt A, von A nach C, von C nach B und von B zurück zu P halten wir die Richtung relativ zur Bewegungsrichtung fest. Nur in den Punkten A, C und B berücksichtigen wir, daß der Weg einen Knick um $\pi/2$ nach links macht und wir zur Abweichung nach recht jeweils diesen Winkel zulegen müssen, wenn wir die Eckpunkte passieren. Sind wir bei P wieder angelangt, haben wir zur Abweichung nach rechts $3\pi/2$ addiert, insgesamt beobachten wir also eine Drehung der Tangentialebene um $\pi/2$ nach links. Dieser Wert von $\pi/2$ ist identisch mit dem Exzeß der Winkelsumme des umfahrenen Dreiecks. Diese Winkelsumme überschreitet den euklidischen Wert (π) gerade um diese $\pi/2$.

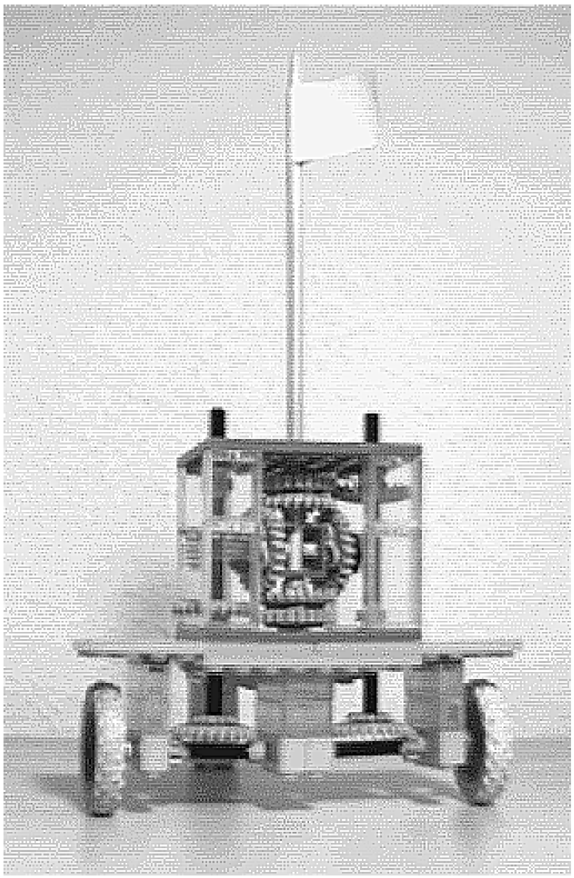

Abbildung 9: Modell eines Kompaßwagens aus LEGO-Bausteinen.

Das Modell realisiert den Aufbau nach Abb. 5. Die Übersetzung von den Laufrädern auf das Getriebe wird durch den Radstand angepaßt. Man muß darauf achten, daß die Aufbohrungen eine genügend lockere Drehung zulassen. Das erfordert u.U., die frei auf den Achsen laufenden Räder gegen Kippen zu stützen.

Dreieck wie in Abbildung 8, dann sehen wir auch sofort, daß die resultierende Drehung gleich dem Exzeß der Winkelsumme des Dreiecks ist. Relativ zur Kurve wird ja nur an den Ecken gedreht, und dort ist der Betrag des Drehwinkels jeweils gleich dem Komplement des Innenwinkels: $\omega_i = \alpha_i - \pi$. Summieren sich die Innenwinkel zu $\sum_i \alpha_i = \pi + \varepsilon$, so finden wir für die Gesamtdrehung $\sum_i \omega_i = \epsilon - 2\pi$. Das ist derselbe Wert, den wir auch bei der Drehung durch die Torsion des fernparallelen Transports gefunden haben. Tatsächlich spiegeln sich die Eigenschaften eines allgemeinen metrischen Raums in der Torsion eines fernparallelen Transports ebenso wider wie in der Krümmung seines geodätischen Transports. — Stellen wir keine besonderen Bedingungen, wird eine Transportvorschrift sowohl Krümmung als auch Torsion haben. In der Allgemeinen Relativitätstheorie sollen die metrischen Eigenschaften der Welt das Gravitationsfeld darstellen. Deshalb wird dort der *torsionsfreie* geodätische Paralleltransport benutzt, für den die Krümmung eine Funktion der Metrik allein ist.

Gewöhnlich stellen wir uns eine gekrümmte Fläche immer als Fläche im euklidischen Raum vor. Wir können Tangentialebenen konstruieren, die an verschiedenen Punkte der Fläche auseinanderfallen, wenn diese gekrümmt ist. So kommt man leicht zu dem Eindruck, Krümmung sei eine Eigenschaft der Einbettung der Fläche in den umgebenden Raum. Das ist aber ein Trugschluß. Alles, was oben über Torsion und Krümmung definiert wurde, nimmt auf die Lage von etwaigen Tangentialebenen keinen Bezug. Die Rede ist immer nur von Kurven und Richtungen *in* der Fläche. Krümmung und Torsion sind allein durch Lagebeziehungen *innerhalb* der Fläche definiert. Insbesondere die Krümmung des geodätischen Paralleltransports ist allein durch die Maßverhältnisse in der Fläche bestimmt. Wir können — dies erweiternd — eine Krümmung auch für den dreidimensionalen Raum oder die vierdimensionale Welt der Relativitätstheorie allein aus deren inneren Maßverhältnissen bestimmen, wie sie etwa durch die Wellengleichung oder die Potentialgleichung gegeben werden. Wir sind dabei *nicht* auf eine Einbettung in Räume oder Welten höherer Dimension angewiesen.

Wer sich ein Modell des Kompaßwagens basteln will, kann dies leicht mit dem Zahnradsatz von LEGO tun. Mit ein paar Aufbohrungen für Achsen und frei laufende Räder kommt man mit dem Rest zurecht, der aus der Vorschulzeit übriggeblieben ist und im Keller verstaubt (Abb. 9).

Literatur

[1] NEEDHAM, J.: Physics and physical technology II. Mechanical engineering, – Science and civilization in China 4, Cambridge UP (1977).
[2] SANTANDER, M.: The chinese south-seeking chariot: A simple mechanical device for visualizing curvature and parallel transport. – Amer.J.Phys. **60** (1992), 782-787.
[3] CHIN, YINAN:
http://biaa.sinica.edu.tw/einmann/index.html
[4] HUANG DI:
http://www.span.com.au/100emperors/2.html,
http://www.sh.com/culture/legend/huangdi.htm