

# Aberration und Relativität mit zwei Augen

von

**Dierck-E.Liebscher**

Das scheinbare Bild zu finden, das ein Beobachter in schneller Bewegung von seiner Umgebung hat, scheint eine Aufgabe der Relativitätstheorie zu sein. In erster Linie wird das Bild aber von der Aberration bestimmt. Die Aberration ist ein Effekt erster Ordnung in der Geschwindigkeit und muß deshalb auch in vor-relativistischer Situation, etwa in der Newtonschen Emanationstheorie,<sup>1</sup> erwartet und berücksichtigt werden.<sup>2</sup> Die Relativitätstheorie überlagert danach das vor-relativistische Bild mit den Folgen von Längenkontraktion und Zeitdilatation.

Die Aberration des Lichts ist seit Bradleys Messung 1729 ein Beweis dafür, daß auch das Licht Zeit braucht auf seinem Weg durch den Raum. Deshalb führt die Zusammensetzung der Geschwindigkeit des Lichts mit der eines Beobachters in Bewegung zu einer Änderung seiner Richtung. Nimmt man die Bewegung der Erde um die Sonne, so ist die Bahngeschwindigkeit etwa  $10^{-4}$  (in Einheiten der Lichtgeschwindigkeit). Diese Größe finden wir dann auch für den Winkel maximaler Aberration. Setzen sich die Geschwindigkeiten additiv zusammen, wie wir das aus der täglichen Erfahrung erwarten, können wir die Aberration wie in Abbildung 1 berechnen. Nach der Relativitätstheorie setzen sich Geschwindigkeiten nicht mehr additiv zusammen. Aber es ist immer noch einfach, die Formel für die Aberration zu finden, die sich aus der Lorentz-Transformation des Richtungsvektors in der Raum-Zeit bestimmt. Die von vor-relativistischer und relativistische Aberration bewirkte Abbildung der scheinbaren Himmelskugel auf sich selbst zeigt Abbildung 2.

Die Aberration bildet zunächst nur Richtungen auf Richtungen ab und liefert keinen Ort im *Raum*, an dem sich die Quelle zu befinden scheint. Üblicherweise versucht man mit einer Diskussion der Signallaufzeit, die durch die Aberration gegebene Abbildung der scheinbaren Himmelskugel auf sich selbst auf eine Abbildung des dreidimensionalen Raums zu erweitern. Diese Abbildung wird an vielen Stellen dargestellt [3]. Man kann sich jedoch auch eine Abbildung verschaffen, ohne zu Hilfskonstruktionen zu greifen, die dem unbewaffneten Beobachter nicht zur Verfügung stehen. Dazu muß der Beobachter beide Augen öffnen. Dann stehen ihm für jeden Quellpunkt zwei Richtungen an zwei verschiedenen Punkten zur Verfügung, und er kann eine Parallaxe zu finden. Allerdings sind die beiden Richtungen, die die Aberration an den beiden Augen liefert, im allgemeinen windschief. Das heißt, für einen

---

<sup>1</sup>Das Licht besteht danach aus Teilchen, die mit einer festen Geschwindigkeit relativ zur Quelle ausgesendet werden und auf die die Addition der Geschwindigkeiten ohne Weiteres angewendet werden kann.

<sup>2</sup>Mit der Akustik ist es etwas komplizierter. Wellen zeigen zunächst keine Aberration. Die Lichtwellen zeigen nur Aberration, weil sie auch eine Relativität der Gleichzeitigkeit bestimmen. Die Schallwellen tun das nicht. Schallwellen breiten sich in einem harmlosen Medium, etwa der Luft aus. Wenn man ein Ohr konstruieren kann, welches wie das Fresnelsche Teleskop im frei strömenden Äther die Richtung einer Interferenzfigur bestimmt, dann allerdings kann man die Formeln der Emanationstheorie in der Akustik verwenden.

endlichen Augenabstand gibt es kein eigentliches Bild der Quelle. Für einen infinitesimalen Augenabstand hebt sich aber dieser Mangel und man kann die Bildpunkte bestimmen. Dabei treten nun merkwürdige Dinge zutage.

- 1 Alle Effekte sind primär durch die Aberration verursacht. Sie treten also auch auf, wenn man eine nichtrelativistische Modell der Lichtausbreitung betrachtet, etwa die Newtonsche Emanationstheorie. In der Akustik ist Aberration, wie in der zweiten Fußnote angedeutet, etwas komplizierter, aber nicht unmöglich.
- 2 Die Relativitätstheorie stiftet Effekte zweiter Ordnung in der auf die Lichtgeschwindigkeit bezogenen Bewegung.
- 3 Diese Effekte sorgen aber in jedem Fall dafür, daß die Abbildung der scheinbaren Örter eine exakt konforme Abbildung der Kugelfläche auf der Himmelkugel wird [2]. Im vorrelativistischen Fall ist die Abbildung nicht konform. Bereits das Bild des Einäugigen ist dann verschert und nicht nur verdreht bzw. im Maßstab verändert.
- 4 Im dreidimensionalen Bild des zweiäugigen Beobachters zeigen die Bilder bis auf besondere Lagen eine Scherung.
- 5 Das Bild des zweiäugigen Beobachters hängt nicht nur von der Distanz der Objekts vom Apex ab, sondern auch von der Stellung der Augen zu Objekt und Apex.

Das zweidimensionale Bild wird traditionell durch eine Laufzeitdiskussion ergänzt [5], die der Koordination entspricht, die von Ehlers, Pirani und Schild [1] in die Allgemeine Relativitätstheorie eingeführt wurde. Wir wollen hier aber allein vom momentanen Bild ausgehen. Wir unterstellen nun einen Beobachter, der sich geradlinig gleichförmig durch eine Welt bewegt, in der die Gegenstände wie Kulissen ein Bezugssystem bestimmen, in dem sie alle ruhen. Wir wollen das dreidimensionale scheinbare Bild dieser Welt zeichnen. Dazu suchen wir uns einen Moment aus, zu dem sich der Beobachter an einem bestimmten Punkt befindet. Der Beobachter verarbeitet den Eindruck, den seine Augen zum gegebenen Zeitpunkt gleichzeitig wahrnehmen. Wie wir aus der Relativitätstheorie wissen, wird diese Gleichzeitigkeit im Ruhssystem der Umgebung in eine Zeitfolge gewandelt, die den effektiven Augenabstand verändern kann: Wir haben eine Längenkontraktion zu erwarten. Deren genaue Form ist hier nicht weiter von Belang.

Zunächst zeigen wir den Eindruck, den die Kugel um den Beobachter in dem Moment wirklich macht, wenn der sich mit der Geschwindigkeit  $\vec{v}$  bewegende Beobachter gerade im Zentrum befindet. Merkwürdigerweise zeigt sich bereits hier, daß das Bild von der Stellung der Augen abhängt. Abbildung 3 zeigt das Bild für einen Beobachter, dessen Augen hintereinander angeordnet sind, der seitwärts zur Bewegungsrichtung blickt. Abbildung 4 zeigt das Bild für einen Beobachter, dessen Augen nebeneinander angeordnet sind, der vorwärts in Bewegungsrichtung blickt.

Eindrucksvoller ist vielleicht der Anblick einer Tunnelröhre, durch die der Beobachter mit großer Geschwindigkeit fährt (Abb.5,6).

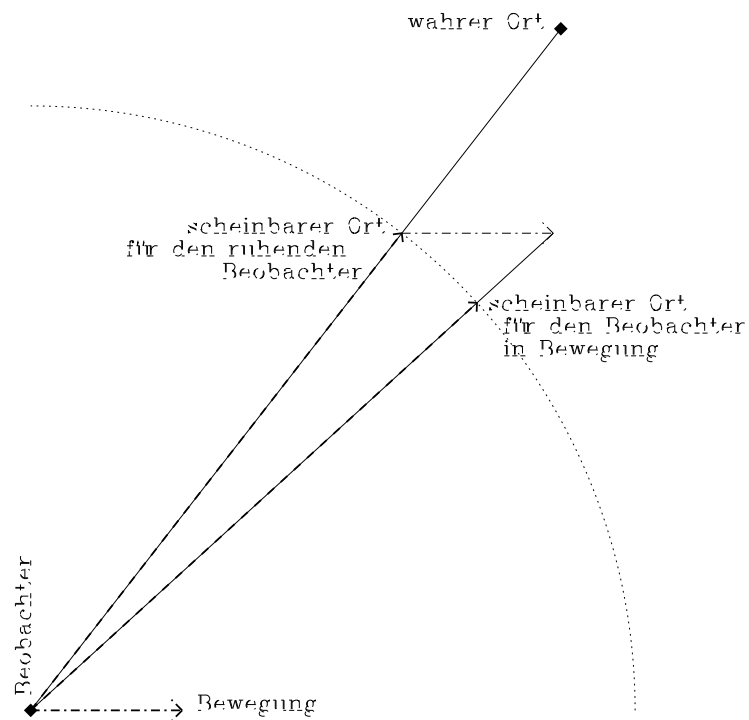


Figure 1: Die Aberration als Zusammensetzung von Geschwindigkeiten

Die Richtung zum wahren Ort der Quelle ist der normierte Abstandvektor. Er wird mit der auf die Signalgeschwindigkeit normierten Geschwindigkeit des Beobachters zusammengesetzt. Hier ist diese Zusammensetzung als additiv unterstellt.

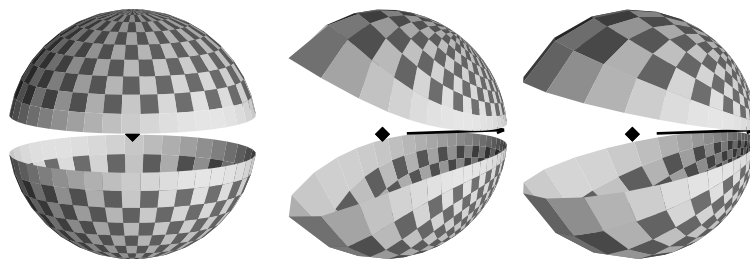


Figure 2: Die Abbildung der scheinbaren Himmelskugel durch die Aberration

Links ist die Ausgangskugel zu sehen, in der Mitte ihr Bild im vor-relativistischen Fall, rechts im relativistischen Fall, wo die Abbildung konform ist, was sich unter anderem darin ausdrückt, daß das Bild eines Breitenkreises eben ist.

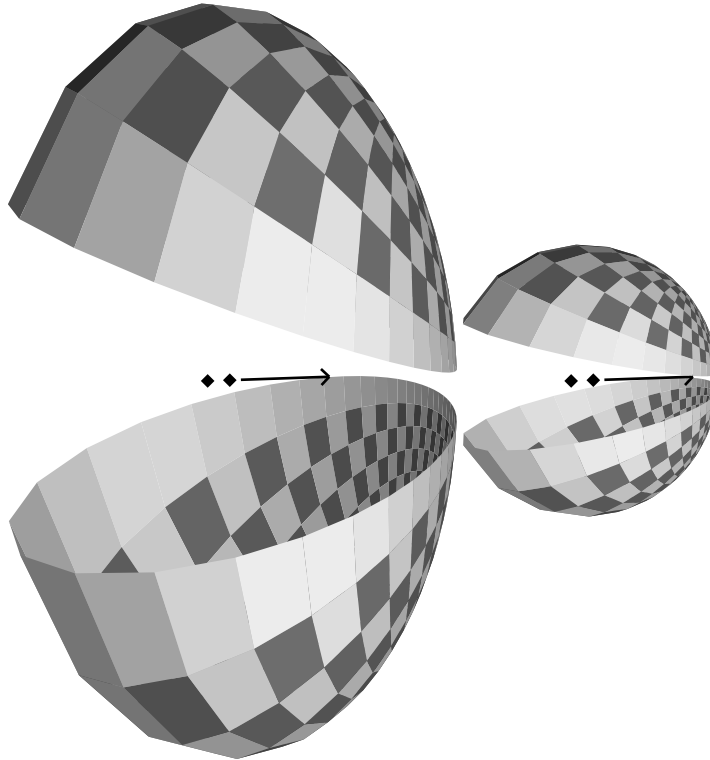


Figure 3: Der Beobachter blickt seitwärts in die Kugel

Links ist das Bild im vor-relativistische Fall, rechts im relativistischen Fall gezeichnet. Im ersten Fall ist das Bild ein Rotationsellipsoid, dessen Achsen senkrecht zur Bewegungsrichtung um den Lorentz-Faktor  $\gamma$  verlängert sind. Im zweiten Fall ergibt sich eine Kugel, die um den Faktor  $\gamma^{-1}$  verkleinert ist. Letzteres ist Ausdruck der Lorentzkontraktion des Augenabstands beim Übergang vom Ruhssystem des Beobachters ins Ruhssystem der Quellen. Erstaunlicherweise hat der Lorentz-faktor aber auch eine Bedeutung für den vor-relativistischen Fall. Die Geschwindigkeit hat in beiden Teilen den Betrag  $\beta = 0.8$ .

Unsere Bilder sind alle für einen Beobachter, der sich durch einen Raum mit ruhenden Quellen bewegt. Im relativistischen Fall gibt es keine Änderung, wenn sich die Quellen bewegen, schließlich zählt nach dem Relativitätsprinzip nur die Relativbewegung. Im vor-relativistischen Fall ist das allerdings anders. Hier setzen sich die Geschwindigkeiten additiv zusammen und es gibt nur ein Bezugssystem, in dem sich das Signal richtungsunabhängig ausbreitet: das Ruhssystem des Mediums. Wir haben bisher damit gerechnet, daß in diesem auch die Quellen ruhen. Bewegen sich die Quellen nun gegen einen ruhenden Beobachter, ändert sich die Situation. Das ist nicht weiter verwunderlich, wenn man sich daran erinnert, daß auch der Doppler-Effekt seine Form ändert, wenn man von einer Bewegung der Beobachters gegen eine ruhende Quelle zu einer Bewegung der Quelle gegen einen ruhenden Beobachter übergeht. Um die Abbildung im zweiten Fall zu finden, müssen wir die scheinbaren Örter der Quelle zu den leicht verschiedenen Zeitpunkten, an denen das ihr Signal an

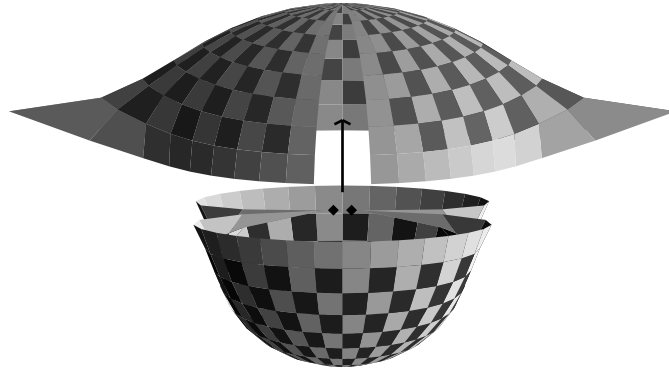


Figure 4: Die Kugel für den vorwärts blickenden bewegten Beobachter  
 In diesem Bild ist die Geschwindigkeit nach oben gerichtet. Die Abbildung hat Singularität für die Nullstelle des Nenners in Gleichung (7). ( $\beta = 0.14.$ )

den beiden Augen eintrifft, zu einer Parallaxe zusammensetzen.

Für die Akustik können wir das Bild weiter verfeinern, wenn wir relativistische Akustik betreiben. Das ändert nichts an der bevorzugten Stellung des Bezugs auf das Medium, ersetzt aber Galilei-Transformationen durch Lorentz-Transformationen. Nun sind zur Berechnung der Effekte in der Akustik die Geschwindigkeiten in Einheiten der Schallgeschwindigkeit einzusetzen. Relativistische Korrekturen sind also immer von der Ordnung  $c_{\text{Schall}}^2/c_{\text{Licht}}^2$ , d.h. im allgemeinen vernachlässigbar. In beiden Fällen bricht die Signalausbreitung die Relativität, wenn man das Medium nicht explizit einbezieht.

## References

- [1] Ehlers,J., Pirani,F.A.E., Schild,A. (1972): The geometry of free fall and light propagation. *in: O’Raifeartaigh,L.(ed.), Papers in honour of J.L.Synge*, University Press, Oxford, pp.63-84.
- [2] Penrose,R. (1959): The apparent shape of a relativistically moving sphere, *Proc.Camb.Phil.Soc.* **55**, 137.
- [3] Ruder,H., Ruder,M. (1994): *Die Spezielle Relativitätstheorie*, Vieweg Braunschweig.
- [4] Scott,G.D., van Driel,H.J. (1970): Geometrical appearances at relativistic speeds, *Amer.J.Phys.* **38**, 971.
- [5] Scott,G.D., Viner,M.R. (1965): The geometrical appearance of large objects moving at relativistic speeds, *Amer.J.Phys.* **33**, 534.

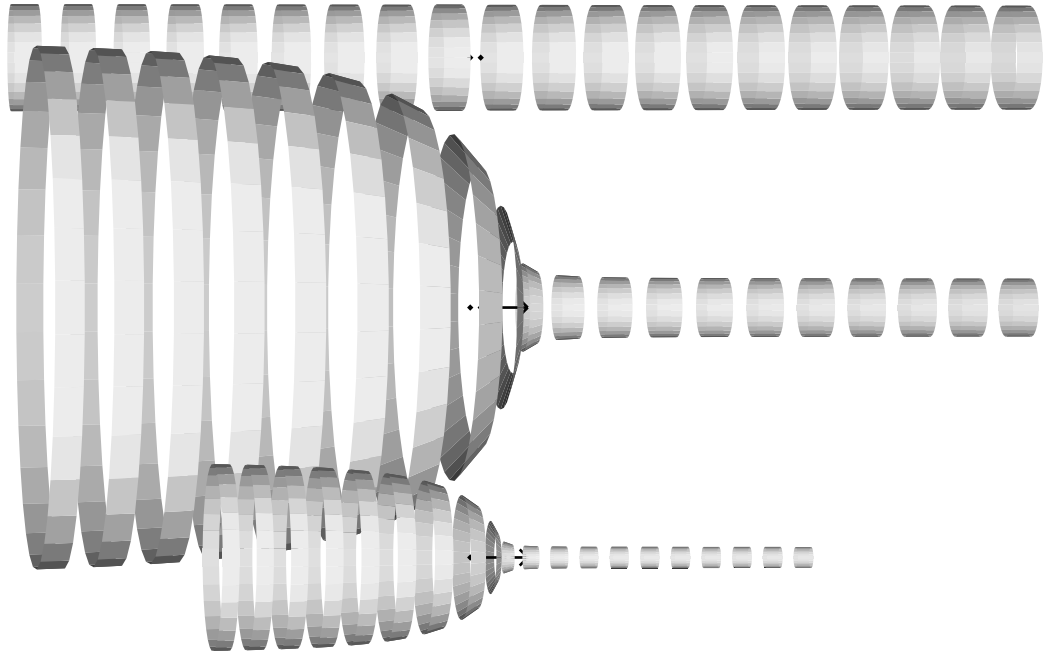


Figure 5: Der Tunnel für den seitwärts blickenden bewegten Beobachter  
 Der Tunnel sei in seinem Ruhsystem als Folge von Ringen dargestellt (oberer Teil). Der relativistische Fall ist unten zu sehen. In der Vorwärtsrichtung scheint der Tunnel verengt (Factor  $(1 - \beta)$ ), rückwärts dagegen erweitert (Factor  $(1 + \beta)$ ). In beiden Fällen scheint der Tunnel um den Lorentzfaktor  $\gamma$  verkürzt. Das ist wieder ein Effekt der Lorentz-Kontraktion des Augenabstands. Der nichtrelativistische Fall ist in der Mitte dargestellt. Wieder ist der Tunnel in Vorwärtsrichtung verengt, diesmal mit dem Faktor  $(1 + \beta)^{-1}$ . Rückwärts ist der Tunnel erweitert mit dem Faktor  $(1 - \beta)^{-1}$ . Es gibt keine Kontraktion ( $\beta = 0.8$ .)

[6] Terrell, J. (1959): Invisibility of the Lorentz contraction, *Phys.Rev.* **116**, 1041.

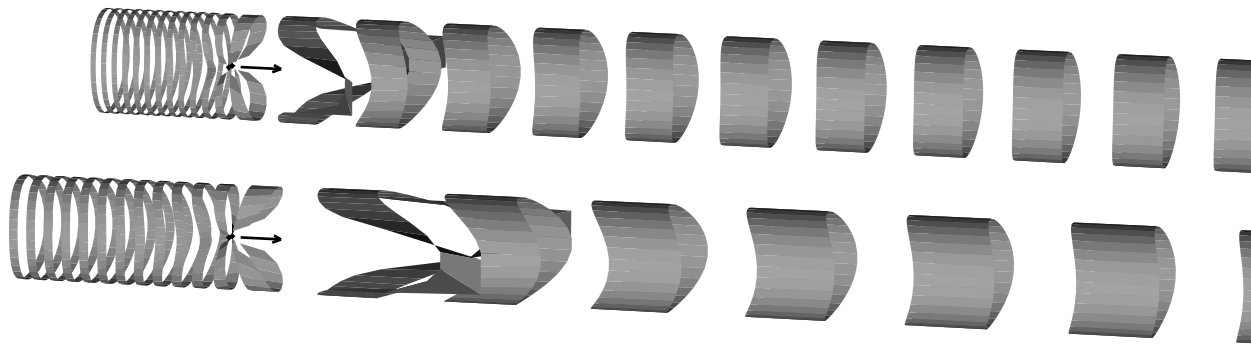


Figure 6: Der Tunnel für den vorwärts blickenden bewegten Beobachter  
 Der relativistische Fall wird im unteren Teil gezeigt. In weiter Entfernung ist der Tunnel weder verengt noch geweitet, aber er ist in Vorwärtsrichtung gedehnt (Faktor  $\gamma(1 + \beta)$ ) und rückwärts verkürzt (Faktor  $\gamma(1 - \beta)$ ). Der nichtrelativistische Fall ist im oberen Teil gezeichnet. Die Streckung in Vorwärtsrichtung hat nun den Faktor  $(1 + \beta)$ , die Kontraktion rückwärts den Faktor  $(1 - \beta)$ . In beiden Fällen scheint der Tunnelboth lokal psychodelisch verformt. Beide Abbildungen enthalten Singularitäten.

### Die Aberrationsformel

Der Beobachter bewegt sich gleichförmig,  $\vec{r} = \vec{v}t$ . Wir suchen das Bild, das er sich zum Zeitpunkt  $t = 0$  von der Umgebung macht. Im Ruhssystem der Objekte ist der scheinbare Ort einer Quelle bei  $\vec{s}$  durch den Richtungsvektor

$$\vec{n} = \frac{\vec{s} - \vec{r}}{|\vec{s} - \vec{r}|}$$

gegeben. Wenn sich der Beobachter bewegt, wird diese Richtung durch die Aberration geändert,  $\vec{n}^* = \vec{n}^*[\vec{n}, \vec{v}]$ . Die vorrelativistische Formel ist

$$\vec{n}^* = \text{Richtung von } \left( \vec{n} + \frac{\vec{v}}{c} \right) = \frac{\vec{n} + \frac{\vec{v}}{c}}{1 + 2\beta\xi + \beta^2}, \quad (1)$$

wenn wir den Betrag  $|\vec{v}|$  der Geschwindigkeit gleich  $\beta c$  und den Richtungs-cosinus zwischen  $\vec{n}$  und  $\vec{v}$  gleich  $\xi$  setzen. Bis auf Effekte der Ordnung  $c_{\text{Schall}}^2/c_{\text{Licht}}^2$  und natürlich alle Umströmungseffekte wird diese Formel der Schallausbreitung gerecht.

Im relativistischen Fall muß das durch

$$\vec{n}^* = \text{Richtung von } \left( \vec{n} - \frac{\vec{v}(\vec{v}\vec{n})}{v^2} + \gamma\vec{v}\left(\frac{\vec{n}\vec{v}}{v^2} + \frac{1}{c}\right) \right) \quad (2)$$

ersetzt werden.  $\gamma$  bezeichnet den Lorentz-Faktor  $\gamma = 1/\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ . Gleichung (2) bestimmt eine konforme Abbildung der Kugel auf sich.



## Die Parallaxe

Wir suchen die Stelle  $\vec{s}^*$ , an der eine Quelle am Punkt  $\vec{s}$  von einem Beobachter im Punkt  $\vec{r}$  gesehen wird, wenn dieser sich mit einer Geschwindigkeit  $\vec{v}$  bewegt. Wir unterstellen eine Aberrationsformel  $\vec{n}^* = \vec{n}^*[\vec{r}, \vec{s}, \vec{v}]$ . Nun haben wir zwei Augen, infinitesimal benachbart, bei  $\vec{r}_1 = \vec{r}$  und  $\vec{r}_2 = \vec{r} + \vec{e}$ . Sie erfahren die beiden Richtungen  $\vec{n}^*[\vec{n}[\vec{r}_1, \vec{s}], \vec{v}]$  und  $\vec{n}^*[\vec{n}[\vec{r}_2, \vec{s}], \vec{v}] = \vec{n}^*[\vec{n}[\vec{r}_1, \vec{s}], \vec{v}] + \frac{d\vec{n}^*}{d\vec{n}} \frac{d\vec{n}}{d\vec{r}} \vec{e}$ . Die gesuchte Position ist der Schnittpunkt der Geraden  $\vec{r}_1^* + \lambda_1 \vec{n}^*$  und  $\vec{r}_2^* + \lambda_2 (\vec{n}^* + \frac{d\vec{n}^*}{d\vec{n}} \frac{d\vec{n}}{d\vec{r}} \vec{e})$ . Der Schnittpunkt existiert in der Grenze verschwindender  $\vec{e}$  und wird durch die Formel

$$\vec{s}^* = \vec{n}_1^* \cdot \frac{(\vec{n}_1^* \times \vec{n}_2^*)(\vec{e}^* \times \vec{n}_2^*)}{(\vec{n}_1^* \times \vec{n}_2^*)(\vec{n}_1^* \times \vec{n}_2^*)} = \vec{n}^* \cdot \frac{(\vec{n}^* \vec{e}^*)(\vec{n}^* d\vec{n}^*) - (\vec{n}^* \vec{n}^*)(\vec{e}^* d\vec{n}^*)}{(\vec{n}^* \vec{n}^*)(d\vec{n}^* d\vec{n}^*) - (\vec{n}^* d\vec{n}^*)(\vec{n}^* d\vec{n}^*)} + O[da^*] . \quad (3)$$

gegeben. Die Umsetzung der Koordinaten  $\vec{r}$  des Ruhsystems der Objekte in die Koordinaten  $\vec{r}^*$  des Ruhsystems des Beobachters bringt noch eine Korrektur im relativistischen Fall.

Ein Computerprogramm setzt  $\vec{e}^*$ , findet durch Transformation  $\vec{e} = \vec{e}^* + \frac{1}{v^2} \vec{v}(\vec{v} \vec{e}^*)(1/\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - 1)$ , bestimmt im Ruhsystem der Objekte  $d\vec{n} = -\frac{1}{|\vec{s}|}(\vec{e} - \vec{n}(\vec{n} \vec{e}))$ , transformiert ins Ruhsystem des Beobachters (d.h. benutzt die Aberrationsformel), um  $d\vec{n}^* = d\vec{n} + \frac{1}{v^2} \vec{v}(\vec{v} d\vec{n})(1/\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - 1)$  zu finden und in die Formel (3) einzusetzen.

## Die Abbildung

Wir bezeichnen die Richtung der Bewegung mit  $\vec{w}$ , ihre Größe – bezogen auf die Signalgeschwindigkeit – mit  $\beta$ , den Lorentz-Faktor  $\sqrt{1-\beta^2}^{-1}$  mit  $\gamma$ , die Richtungscosinus ( $\vec{n}\vec{w}$ ) mit  $\xi$  und  $(\vec{e}\vec{n})/|\vec{e}|$  mit  $\eta$ . Dann lautet die Transformation der Lagen im Falle hintereinanderstehender Augen

$$\vec{s}^* = s \frac{\vec{n} + (\xi(\gamma - 1) + \beta\gamma)\vec{w}}{\gamma^2(1 + \beta\xi)}. \quad (4)$$

Die Kugel  $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$  wird auf die kleinere Kugel  $\gamma^2(x^{*2} + y^{*2} + z^{*2}) = r^2$   $\gamma^2 x^{*2} + y^{*2} + z^{*2} = \gamma^2 r^2$  abgebildet. Im vorrelativistischen Fall ist

$$\vec{s}^* = s \frac{\vec{n} + \vec{v}}{1 + \beta\xi}. \quad (5)$$

Hier ist das Bild der Kugel ein Ellipsoid, nämlich  $\gamma^2 x^{*2} + y^{*2} + z^{*2} = \gamma^2 r^2$ . Stehen die Augen nebeneinander, finden wir

$$\vec{s}^* = s(\vec{n} + (\xi(\gamma - 1) + \beta\gamma)\vec{w}) \frac{C_1(1 - \eta^2) + C_2}{C_1(1 - \eta^2 + \eta^2\xi^2(\gamma^2 - 1)) - C_2\xi} \quad (6)$$

mit  $C_1 = \gamma^2(1 + \beta\xi)^2$  und  $C_2 = (\xi(1 - \gamma)^2 + \beta\gamma^2)\xi\eta^2$ . Im vor-relativistischen Fall ist das etwas einfacher, nämlich

$$\vec{s}^* = s(\vec{n} + \vec{v}) \frac{(1 - \eta^2)(1 + 2\beta\xi + \beta^2) - \beta\xi\eta^2}{(1 - \eta^2)(1 + 2\beta\xi + \beta^2) - \beta^2\xi^2\eta^2}, \quad (7)$$

aber immer noch singulär.

Bewegt man die Augen und richtet sie immer auf die jeweilige Quelle, entsteht die Abbildung

$$x^* = \gamma(x + \beta\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}), \quad y^* = y, \quad z^* = z, \quad (8)$$

Das ist die von Scott und Viner [5] auf anderer Grundlage berechnete Abbildung.